ELEMENTI
DI ALGEBRA

DI

PIETRO PAOLI

P. P. DELLE MATEMATICHE SUPERIORI NELL'UNIVERSITÀ DI PISA, UNO DE' QUARANTA DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE, E DELL'ISTITUTO DI BOLOGNA.

TERZA EDIZIONE
CON CORREZIONI E GIUNTE
DELL' AUTORE.

TOMO PRIMO

PISA
DALLA TIPOGRAFIA
DELLA SOCIETÀ LETTERARIA
MDCCCIII

AGLI STUDIOSI
DELLE MATTEMATICHE
GLI EDITORI

Dopo aver dato in luce con plauso di tutti i più intelligenti Mattematici gli Elementi di Geometria *del celebre Le-Gendre tradotti con la possibile accuratezza in italiano; non si potea certo da noi proseguir meglio a presentar il corso dello studio delle Mattematiche, quanto in pubblicar come facciamo gli* Elementi di Algebra *del Sig. Dott. Paoli, superiore ad ogni elogio che potessimo farne, se pur la sua modestia ci permettesse di farlo.*

Il plauso con cui venne accolta la prima edizione di essi, quantunque riuscita disgraziatamente scorretta; le ricerche continue che si fanno della non elegante edizione di Torino; e la stima sopra tutto che professiamo al celebre Autore ci ha fatto risolvere a pubblicar la presente sotto gli occhi dell'Autore stesso, accoppiando in essa, per quanto è stato possibile, oltre una scrupolosa correzzione, l'economia necessaria per un libro di scuola alla nitidezza, esattezza, e perfezione tipografica. Ognuno che vi ponga l'occhio potrà agevolmente convincersi di quanto sia essa superiore a tutti i libri di algebra che si sono pubblicati, e si pubblicano attualmente in Italia.

Nè meno certo ci abbisognava per corrispondere in qualche modo alle gentilezze dell'Autore, che non solo si è voluto prestare alle nostre premure accudendo all'edizione; non solo ci ha offerto dei notabili cambiamenti, rischiaramenti, ed aggiunte nel corso dei due Volumi già pubblicati; ma si è voluto occupare ancora della composizione d'un intiero terzo Volume, che vedrà ora per la prima volta la luce. Conterrà questi una più ampia esposizione di alcune materie nei precedenti Volumi trattate; altre nuovamente esponendone, ed in specie l'eccellente rigorosa maniera di presentare i principj del Calcolo Differenziale immaginata dal sommo geometra La-Grange, servirà di supplemento agli altri due; e porrà i giovani sulla strada delle più importanti ricerche analitiche in questi ultimi tempi intraprese.

Speriamo dunque che la gioventù specialmente, la quale in Italia si è rivolta da poco in qua in gran numero allo studio delle Mattematiche, ci saprà buon grado delle nostre cure; come degli attestati non equivoci di gradimento hanno superate di gran lunga sempre le nostre speranze in ogni intrapresa tipografica, che ha veduto la luce da questi torchi.

PREFAZIONE

DELL' AUTORE

Fra tutti quelli, che in Italia si danno allo studio delle Matematiche, se qualche genio sublime si eccettua, il quale con la forza del suo spirito abbia trionfato di tutti gli ostacoli, e siasi posto a livello de' Geometri oltramontani, pochi altri si contano, che giungano alla mediocrità. Nè ciò si deve ripetere dalla mancanza degli ingegni, che abbondano in Italia, come per tutt' altrove, ma dal mal inteso metodo d' insegnare le Matematiche: poichè quivi non si pongono nelle mani de' giovani che Elementi molto leggieri, i quali compariscono facili, perchè sono inesatti, e non trattano, in ciascun ramo della Scienza, che di qualche caso particolare. Il primo inconveniente che ne nasce, è quello, che i giovani si avvezzano a contentarsi di una tal quale evidenza; giacchè una dimostrazione rigorosa non può ottenersi, che quando la cosa si considera in tutta la sua generalità. Inoltre, è certo che niuno può rendersi abile, se non leggendo le Opere de' gran Geometri, i quali suppongono nel lettore la scienza portata a quel grado, in cui si trova, allorchè scrivono. Ora chi non ha trovato negli Elementi, che quelle cognizioni soltanto che si avevano un secolo addietro, al primo leggere de' libri degli Euler, *de'* d'Alembert, *dei* de la Grange *si abbatte in difficoltà insuperabili. Di qui il più delle volte succede, che o abbandona affatto l' intrapresa carriera, o si contenta di rimanere nella ristretta sfera delle cognizioni più elementari, passando la vita d' elemento*

in elemento, ed in ciò fare talvolta è confortato dalla imperizia de' Maestri, i quali non essendo in stato di toglierli quelle difficoltà, che essi pure incontrano, gli consigliano ad astenersi da certe ricerche, che con simulato, ma prudente disprezzo caratterizzano come intralciate ed inutili. Qualche volta però persistono nell' incominciato camino, e vanno quà e la cercando di riempier le lacune, che trovano nelle loro cognizioni; ed in ciò fare senza alcuna regola perdono molto tempo, onde appena riesce loro d' intendere alcuni de' libri magistrali, non che di contribuire con le loro proprie ricerche all' avanzamento della Scienza. Nella complicazione, cui è giunta l' Algebra, si rende necessario un metodo, il quale il più presto che è possibile, avuto riguardo alla capacità de' giovani, li ponga in grado di leggere senza inciampo i libri de' Geometri del prim' ordine. Un tal metodo appunto è quello, che io mi son proposto di delineare in questi Elementi; e perciò ho procurato di toglier di mezzo le ricerche inutili o inesatte, o particolari; ed in ciascun ramo della Scienza ho tentato di porre i giovani sulla strada de' metodi più generali e più accurati, che di presente si conoscono. In qualche parte ho potuto trattar la materia in tutta l' estensione relativamente alle cognizioni, che finora abbiamo: le altre formano una introduzione alle Opere grandi; e qui ho procurato di porre in chiara luce i principj, e togliere quelle difficoltà, che nella lettura delle medesime si sogliono incontrare. Il tutto poi mi sono studiato di dimostrare con esattezza, e col massimo rigore; non appoggiando mai la prova alla felice riuscita ne' casi particolari, ma deducendola a priori *dalla natura della cosa. Su questo punto mi pare di aver supplito a molte mancanze, che si trovano nella maggior parte de' libri, specialmente elementari, i quali invero nulla dovrebbero contenere, che non fosse evidentemente certo. Giudicheranno i Geometri, se io sia riuscito felicemente nel piano, che mi sono proposto: ma in qualunque modo il mio libro potrà essere utile ad altri per farne un migliore. Mi resta solo ad av-*

vertire, che non ho mancato di citare gli Autori delle scoperte più grandi, e di quelle specialmente, che al nostro secolo appartengono: ma sarei stato troppo lungo, se anche nelle minori ricerche avessi dato a ciascuno quanto gli è dovuto. Ciascuno adunque potrà riconoscervi il suo, che io non intendo usurparmi; contento, se qualche piccola parte ne rimane anche a me o nella esposizione de' metodi, o nella invenzione.

ELEMENTI DI ALGEBRA

PARTE PRIMA

DELL' ALGEBRA DELLE QUANTITÀ FINITE

CAPITOLO PRIMO

Dell' Algebra in generale.

1.

Si chiama *quantità* o *grandezza* tutto ciò che è suscettibile di accrescimento o di diminuzione, tutto ciò di cui si può assegnare o concepire il doppio o la metà, il triplo o la terza parte, ec. Così il tempo, il peso, i numeri, le linee sono quantità, perchè si può concepire che il tempo, il peso, i numeri, le linee vadano continuamente crescendo secondo qualunque rapporto. Non così le qualità morali, come sarebbe l'attenzione, la diligenza, sono quantità, perchè quantunque vi sia un'attenzione e una diligenza maggiore di un'altra, non si può però concepire che una sia doppia dell'altra, e in generale non si possono nè assegnare nè concepire i gradi del loro accrescimento o diminuzione. È chiaro che vi sono molte diverse specie di quantità, e da esse hanno origine le diverse parti delle Matematiche, le quali si aggirano nella contemplazione di una specie particolare di grandezze. Le Matematiche in generale formano la Scienza delle quantità, o sia la Scienza che insegna a misurarle.

L'unico mezzo di misurare una quantità qualunque è quello di riguardare come cognita e fissa un'altra quantità della medesima specie, e di determinare il rapporto di quella a que-

sta. Così se vogliamo misurare il tempo, supponghiamo cognito un dato tempo, come sarebbe un'ora, ed osserviamo quante ore son contenute nel tempo che vogliamo determinare. Così pure se dovremo determinare una distanza, ci serviremo di una lunghezza cognita; ed a quella paragoneremo la distanza da misurarsi. In generale conviene per ogni sorte di quantità fissarne una della medesima specie, la quale serva di misura o di *unità*, e determinare il rapporto che ha con questa unità la quantità, di cui si cerca la misura. In tal guisa possiamo paragonar tra loro le quantità di diversa specie, come sarebbe lo spazio percorso da un corpo che si muove, e il tempo impiegato a percorrerlo; perchè noi non paragoniamo propriamente che due numeri, i quali esprimono il rapporto del tempo all'unità di tempo, e quello dello spazio all'unità di spazio.

Siccome adunque tutte le quantità si riducono a numeri, è evidente che il fondamento di tutte le Matematiche deve consistere in un trattato completo della Scienza de'numeri, e delle diverse maniere di computarli. Questa parte importante delle Matematiche, a cui tutte le altre sono appoggiate, si chiama *Algebra* o *Analisi*. L'Algebra pertanto ha per oggetto di considerare i numeri, che rappresentano le quantità, senza aver riguardo alle diverse specie di quantità, che essi rappresentano. Appartiene alle altre parti delle Matematiche il considerare queste diverse specie.

La Scienza in vero de'numeri si suole comunemente chiamare *Aritmetica*; ma questa non si estende che ad alcuni metodi di calcolare, i quali vengono a bisogno nella vita civile, mentre l'Algebra abbraccia tutto ciò che può aver luogo nella dottrina de'numeri, onde si suole anche chiamare *Aritmetica Universale*. L'Aritmetica si serve per denotare i numeri delle cifre arabe, e l'Algebra oltre le cifre arabe adopra ancora le lettere dell'Alfabeto, e in ciò consiste una gran differenza tra l'una e l'altra di queste scienze. Poichè siccome le lettere non significano un numero particolare, ma esprimono qualunque numero, le soluzioni de' problemi, che si ottengono con l'Algebra, sono generali e comprendono tutti i casi, laddove l'Aritmetica non considera che un caso particolare, e per ogni simile caso convien che faccia un nuovo calcolo. Sia proposto per esempio di trovar due numeri, la somma de'quali sia 5, e la differenza 3.

L'Aritmetica risolverà questo problema particolare; ma se la somma o la differenza de' numeri cercati sarà diversa, converrà che faccia un nuovo calcolo affatto simile al primo. L'Algebra all'opposto rende prima generale questo problema, ponendo le lettere a e b per la somma e la differenza de' due numeri cercati, ed il di lei calcolo una volta fatto serve per tutti i casi; poichè per un caso particolare qualunque, non occorre fare altro che sostituire nella soluzione generale alle lettere a e b i numeri corrispondenti a questo caso. Inoltre fatta una operazione sulle cifre numeriche non rimane più alcun segno di questa operazione: ma le lettere conservan sempre la traccia delle operazioni, onde poi si ricavano de' metodi che insegnano ad ottener l'intento con operazioni più semplici di quelle, che porta la regola generale. Questo vantaggio è così grande, che l'Algebra si rende per mezzo di esso capace di operazioni moltiplici ed intrigatissime, alle quali non è in alcun modo permesso di giungere alla comune Aritmetica.

CAPITOLO II.

Delle prime operazioni dell' Algebra.

2.

Siccome nell'Aritmetica per rapporto alle cifre numeriche, così nell' Algebra per rapporto alle lettere si fa la *somma*, la *sottrazione*, la *moltiplicazione*, e la *divisione*. La somma si fa posto tra le quantità il segno $+$; così $a+b$ significa che la quantità a è aggiunta alla quantità b, e si pronunzia *a più b*. Così $a+b+c$ vuol dire che le quantità b e c sono l'una e l'altra aggiunte alla quantità a. Quando le lettere da sommarsi sono simili, come se ad a si dovesse aggiungere a, è chiaro che invece di $a+a$ si può scrivere $2a$. Così pure $2a+a=3a$, $3a+4a=7a$, ec., il segno $=$ denotando eguaglianza.

I numeri, che precedono le lettere, si chiamano i loro *coefficienti*. Così nella quantità $3b$ il numero 3 è il coefficiente di b, come pure nella quantità $2a+4b$ i numeri 2 e 4 sono respettivamente i coefficienti di a e di b. Una lettera senza coefficiente, s'intende sempre che abbia per coefficiente l'unità; così $1a=a$, e l'unità sempre si tralascia.

3.

La sottrazione si fa posto tra le due quantità il segno $-$. Così $a-b$ significa che b è sottratta da a, e si pronunzia *a meno b*; così pure $a+c-d$ vuol dire, che dalla somma delle quantità a e c si deve sottrarre la quantità d. Riguardo alle quantità simili è chiaro che $a-a=0$, cioè zero, $2a-a=1a=a$, $5a-2a=3a$, o sia nella sottrazione delle quantità simili si deve prendere la differenza dei coefficienti. Se dalla quantità $3a$ si dovrà sottrarre $7a$ che è maggiore di quella, la sottrazione si farà togliendo $3a$ da $7a$, e ponendo il segno $-$ avanti il residuo $4a$. Infatti se da $b+3a$ io devo sottrarre $7a$, e scrivo $b-7a$ lasciando da parte $3a$; io ho sottratto troppo, e il di più è contenuto nelle $3a$ che devo aggiungere a b; quindi da b non devo sottrarre $7a$, ma $7a-3a=4a$, e perciò la giusta sottrazione mi darà $b+3a-7a=b-4a$, e quindi sarà $3a-7a=-4a$. Le quantità che hanno avanti il segno $+$, si chiamano *positive*, quelle che hanno il segno $-$, si dicono *negative*. Le quantità negative si devono prendere in un senso affatto opposto a quello, in cui si prendono le positive: così se le quantità positive rappresentano crediti, le negative indicheranno debiti; se le prime esprimono gli spazj percorsi verso una data parte, le seconde esprimeranno spazj percorsi verso una parte a quella direttamente opposta; e così sempre.

Due cose devono quì notarsi: 1.° se una quantità non ha avanti di se alcun segno, vi si deve intendere il segno $+$, che nelle prime lettere si suol sempre omettere, poichè invece di $+a+b$ si scrive $a+b$: 2.° nelle somme e sottrazioni non si deve avere alcun riguardo all'ordine delle lettere, poichè lo stesso significa $a+b$, e $b+a$; e così pure hanno lo stesso valore l'espressioni $a-b$, e $-b+a$. Siccome però siamo avvezzi all' ordine dell'alfabeto, torna conto, per quanto si può, di mantenere quest' ordine.

4.

La moltiplicazione delle quantità a, b si fa ponendo in mezzo ad esse il segno $\times$, o un punto, o pure unendole insieme; cioè le formule $a\times b$; $a.b$, ab hanno l'istesso valore, ed indicano la moltiplicazione di a per b. Così pure l'espressioni

abc, *abcd* significano la moltiplicazione delle tre quantità *a*, *b*, *c*, o delle quattro *a*, *b*, *c*, *d*. Se vi saranno coefficienti numerici, questi si moltiplicheranno tra di loro per le comuni regole dell' Aritmetica, ed il prodotto si porrà avanti alle lettere. Per esempio, siccome 3 moltiplicato per 5 dà 15, la moltiplicazione delle quantità $3a$, $5b$ ci darà $15ab$. Siccome nell'Aritmetica, così nell' Algebra quelle quantità, che si moltiplicano tra loro si chiamano *fattori*, e ciò, che risulta dalla moltiplicazione, *prodotto*. Quì di nuovo conviene avvertire, che l'ordine delle lettere non produce alcuna mutazione nel prodotto: ciò è evidente quando le lettere son due, ma è egualmente vero qualunque sia il numero delle lettere. Infatti siccome $bc=cb$, sarà moltiplicando per *a*, $abc=acb=bca=cba$, ove invece di *bca* si può anche scrivere *bac*, e invece di *cba* si può scrivere *cab*. Potendosi adunque permutare il prodotto di tre lettere in tutti i modi possibili, si abbia adesso il prodotto di quattro lettere *abcd*, cioè $a\times bcd$, ove le tre lettere *b*, *c*, *d* si possono in qualunque modo permutare, per ciò che abbiamo detto, rimanendo prima la *a*. Ma siccome $ab=ba$, il medesimo prodotto si può anche scrivere così *bacd*, e rimanendo prima la *b* le altre possono comunque permutarsi; e così pure scrivendo il medesimo prodotto nelle maniere *cabd*, *dabc*, e ragionando in simil guisa vedremo che il prodotto di quattro lettere ha sempre il medesimo valore, in qualunque ordine queste si scrivano, e l'istessa proprietà hanno i prodotti di cinque o più lettere.

Quelle quantità si dicono *semplici* o *monomie*, che non sono in alcun modo divise dai segni + o —: *complesse* o *polinomie* quelle, che son composte di molte parti tra loro disgiunte dai segni + e —. Così la quantità $3a+5bc+6d-3abc$ è un polinomio, e le parti monomie $3a$, $5bc$, $6d$, $3abc$ si chiamano i di lei termini. Più particolarmente una quantità si dice *binomio*, se è composta di due termini, *trinomio* se di tre, *quadrinomio*, se di quattro, ec.

5.

La divisione essendo una operazione affatto contraria alla moltiplicazione, l'una distrugge quello che ha fatto l'altra: così la quantità *a* prima moltiplicata per *b*, e poi divisa per *b* rimane la medesima. Quindi se una quantità monomia *ab*, o *abc* si

si deve dividere per a, la divisione si farà, se nel dividendo ab, o abc si cancellerà il divisore a; in modo che ab divisa per a sia eguale a b, ed aaa divisa per aa sia eguale ad a. Il resultato della divisione si chiama *quoto* o *quoziente*. Se il dividendo e il divisore avranno de' coefficienti numerici, si farà la divisione di questi con le regole solite. Così $15ab$ divisa per $3a$ ci darà il quoziente $5b$. La divisione alcune volte si esprime col segno: posto tra le due quantità così $a:b$, ma più spesso nel modo seguente $\frac{a}{b}$, le quali due forme indicano la divisione di a per b.

6.

Finora abbiamo parlato delle quantità monomie, passiamo adesso alle polinomie. E primieramente la somma delle quantità complesse si fa come quella delle semplici unendo le quantità col segno $+$, e riducendo poi i termini simili. Si debbano sommare le quantità $3a+2bc-5c$, $2a-bc+7c$, la loro somma sarà $3a+2bc-5c+2a-bc+7c$, o riducendo $5a+bc+2c$. Per far più facilmente la somma, le quantità da sommarsi si scrivono una sotto l'altra, ponendo ciascun termine sotto il suo simile; e poi la somma si eseguisce gradatamente dalla sinistra alla destra, come negli esempj seguenti.

Esempio I.

Si debbano sommare le quantità $5a+3b-4c$, $2a-5b+6c+2d$; io le dispongo nel modo seguente:

$$\begin{array}{l} 5a+3b-4c \\ 2a-5b+6c+2d \\ \hline 7a-2b+2c+2d \end{array}$$

Poi siccome $5a+2a$ fa $7a$, scrivo in primo luogo $7a$ nella somma, similmente pongo $-2b$, perchè $3b-5b=-2b$, $+2c$ perchè $-4c+6c=2c$, e finalmente $+2d$, i quali termini formano la somma cercata.

Esempio II.

Si debbano sommare le quantità $4a+5bc-6cd+8x$, $5a-4bc-6x-2npx+p$, $2bc+3cd+2x-4npx-2p$, $3a+4cd-3p+6npx$. Io le dispongo come segue:

$$\begin{array}{r} 4a+5bc-6cd+8x \qquad\qquad\quad \\ +5a-4bc \qquad\quad -6x-2npx+\ p \\ +2bc+3cd+2x-4npx-2p \\ +3a \qquad +4cd \qquad +6npx-3p \\ \hline 12a+3bc+\ cd+4x \qquad\qquad -4p \end{array}$$

7.

Abbiamo veduto che per sottrarre b da a si scrive $a-b$, cioè si muta il segno alla quantità che deve sottrarsi. Per mostrare che lo stesso ha luogo anche per le quantità complesse, supponghiamo che da a si debba togliere la quantità $b-c$; io dico che questa sottrazione si farà mutati i segni alla quantità $b-c$, in modo che diventi $-b+c$, e poi presa la somma, che sarà $a-b+c$. Poichè se sottraggo b da a scrivendo $a-b$, io ho sottratto troppo, perchè la quantità da sottrarsi non è b, ma $b-c$ minore di b, e quel di più che ho sottratto è $=c$. Convien dunque che aggiunga quello che ho tolto di più, cioè c, e perciò il cercato residuo è $a-b+c$. Quindi se $b=0$, la quantità negativa $-c$ si sottrarrà da a scrivendo $a+c$.

Così pure si vedrà, che dovendo da a sottrarre il trinomio $b-c+d$, ciò otterremo scrivendo $a-b+c-d$, mutando cioè i segni di $b-c+d$, e sommando poi con a. Onde in generale si può stabilire, che per sottrarre da una quantità un polinomio qualunque convien mutare a questo i segni, e poi sommarlo con la proposta quantità. Venghiamo adesso agli esempj.

Esempio I.

Dalla quantità $3a+2bc-3mnx+d$ si debba sottrarre $2a-2bc-mnx+2d-q$. Mutati i segni della seconda quantità essa diventerà $-2a+2bc+mnx-2d+q$; adesso si sommi con la prima come segue

$$\begin{array}{r} 3a+2bc-3mnx+\ d \\ -2a+2bc+\ mnx-2d+q \\ \hline a+4bc-2mnx-\ d+q \end{array}$$

Esempio II.

Dalla quantità $5a+3bc-4mx+q$ si debbano insieme sottrarre le due quantità $3a-4bc-5cd-2q$, $a+7bc-4mx-2cd+2x$. Si faccia come segue.

$$\begin{array}{l} 5a+3bc-4mx+\ q \\ -3a+4bc \qquad\quad +2q+5cd \\ -\ a-7bc+4mx \qquad +2cd-2x \\ \hline a \qquad\qquad\qquad +3q+7cd-2x \end{array}$$

8.

Passiamo alla moltiplicazione delle quantità complesse: e in primo luogo se si dovrà moltiplicare la quantità $a+b$ per c, è chiaro che il prodotto sarà $ac+bc$. Infatti segue dalla natura della moltiplicazione, che, se due numeri devono tra loro moltiplicarsi, avremo il medesimo prodotto se moltiplicheremo subito quei numeri tra loro, o se dividendo il primo in due parti moltiplicheremo ciascuna parte pel secondo, e poi prenderemo la somma de' prodotti.

Ma se si dovrà moltiplicare per c la quantità $a-b$, il prodotto sarà $ac-bc$. Poichè se moltiplico la quantità a per c scrivendo ac, ho moltiplicata c per una quantità maggiore del giusto, giacchè non la devo moltiplicare per a ma per $a-b$, e il di più è il prodotto di b per c; convien perciò che sottragga questo prodotto di b per c, e quindi il vero prodotto sarà $ac-bc$. In altra maniera si può dimostrare, che una quantità positiva c moltiplicata per una negativa $-b$ dà un prodotto negativo. Si debba moltiplicare $b-b$ per c, e siccome $b-b$ è zero, anche il prodotto sarà zero: acciò questo succeda, conviene che $b-b$ moltiplicata per c ci dia $bc-bc$, cioè che il prodotto della quantità negativa $-b$ nella positiva c sia negativo.

Se poi una quantità negativa si moltiplicherà per una negativa, il prodotto sarà positivo. Infatti se si moltiplica $a-a$, o sia zero, per $-b$, il prodotto dev'essere necessariamente zero: Ora, siccome $a\times-b=-ab$; convien che sia $-a\times-b=ab$, perchè il prodotto divenga $-ab+ab$; altrimenti questo prodotto non sarebbe $=0$. Ne segue che $a-b$ moltiplicata per $-c$ dà per prodotto $-ac+bc$.

Dopo queste riflessioni su'segni, la moltiplicazione delle quantità complesse non ha più alcuna difficoltà. Si debbano per esempio moltiplicare le quantità $a-b$, $c-d$: incomincio dal moltiplicare $a-b$ per c ed ho $ac-bc$; poi moltiplico la medesima $a-b$ per $-d$, e ne risulta $-ad+bd$; quindi il cercato pro-

dotto sarà $ac-bc-ad+bd$. Aggiungerò per esercizio alcuni esempj.

Esempio I.

Si debbano moltiplicare tra loro le quantità $2a+5b-3c$, $a-3b+2c$. Si faccia la moltiplicazione come segue

$$\begin{array}{llllll} 2a+5b-3c \\ \;\;a-3b+2c \\ \hline 2aa+5ab-3ac \\ \quad -6ab & & -15bb+9bc \\ \quad\quad +4ac & & +10bc-6cc \\ \hline 2aa-ab+ac-15bb+19bc-6cc \end{array}$$

In primo luogo moltiplico per a tutti i termini $2a+5b-3c$, e scrivo il prodotto $2aa+5ab-3ac$. La medesima quantità moltiplico per $-3b$, e scrivo il prodotto $-6ab-15bb+9bc$ come sopra ponendo ciascun termine sotto il suo simile. Finalmente moltiplico per $2c$, e scritto il prodotto $4ac+10bc-6cc$ come sopra, prendo la somma di questi parziali prodotti, ed ho il prodotto cercato $2aa-ab+ac-15bb+19bc-6cc$.

Esempio II.

Per moltiplicare le quantità $2a+3b+4x$, $3a-2b-6x$ si faccia come segue

$$\begin{array}{llllll} 2a+3b+4x \\ 3a-2b-6x \\ \hline 6aa+9ab+12ax \\ \quad -4ab & & -6bb-8bx \\ \quad\quad -12ax & & -18bx-24xx \\ \hline 6aa+5ab & & -6bb-26bx-24xx \end{array}$$

La moltiplicazione delle quantità complesse alcune volte non si eseguisce, ma si accenna soltanto: ciò suol farsi in varie maniere. Se le quantità $2a+3b-c$, $4a-5b$ si troveranno scritte ne' seguenti modi, $(2a+3b-c)\,(4a-5b)$, $(2a+3b-c).(4a-5b)$, $(2a+3b-c)\times(4a-5b)$, $\overline{2a+3b-c}.\overline{4a-5b}$, $\overline{2a+3b-c}\times\overline{4a-5b}$, si dovrà intendere, che queste quantità devono tra loro moltiplicarsi. Così pure la formula $(a+b)\,(a+2b)\,(a+3b)$ indica la moltiplicazione delle quantità $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, la quale si espri-

me ancora così; $\overline{a+b}\,.\,\overline{a+2b}\,.\,\overline{a+3b}$, oppure $\overline{a+b}\times\overline{a+2b}\times\overline{a+3b}$.

9.

Venghiamo alla divisione delle quantità complesse, e in primo luogo osserviamo che per riguardo ai segni regnano nella divisione le medesime regole, che nella moltiplicazione: cioè una quantità positiva divisa per una positiva dà un quoziente positivo, una positiva divisa per una negativa o una negativa divisa per una positiva il quoto negativo, finalmente una negativa divisa per una negativa il quoziente positivo. La ragione di ciò chiara apparirà, se si rifletta alla relazione che hanno tra loro la moltiplicazione e la divisione. Ora essendo queste due operazioni tra loro contrarie in modo, che l'una distrugge quello che ha fatto l'altra, è evidente che in ogni divisione il quoziente moltiplicato pel divisore deve restituire il dividendo. Posto questo la quantità negativa $-ab$ divisa per la positiva a darà il quoziente negativo $-b$, perchè questo quoziente moltiplicato per a deve restituire il dividendo negativo $-ab$. Così pure ab divisa per $-a$ ci darà per quoziente $-b$, perchè $-b\times-a=ab$; e $-ab$ divisa per $-a$ avrà per quoziente b, perchè $b\times-a=-ab$. Adunque per riguardo ai segni le medesime regole hanno luogo nella moltiplicazione e nella divisione; cioè segni simili danno resultati positivi, segni contrarj resultati negativi.

Passiamo dunque alla divisione delle quantità complesse, e sia proposto di dividere la quantità $aa+2ab+bb$ per $a+b$. La questione si riduce a trovare una quantità tale, che moltiplicata per $a+b$ ci dia per prodotto $aa+2ab+bb$: nell'esempio seguente insegneremo il modo di trovare questa quantità.

Esempio I.

Divisore	Dividendo	Quoziente
$a+b$	) $aa+2ab+bb$ (	$a+b$
	$aa+ab$	
	$ab+bb$	
	$ab+bb$	
	0	

Primieramente si scriva alla sinistra del dividendo il divisore $a+b$; poi si divida il primo termine aa del dividendo pel

primo termine a del divisore, e il quoziente a si scriva alla destra del dividendo. Questo quoziente a adesso si moltiplichi pel divisore, ed il prodotto $aa+ab$ si sottragga dal dividendo, e si avrà per residuo $ab+bb$. Di nuovo il primo termine ab del residuo si divida pel primo termine a del divisore, ed il quoziente b si scriva come sopra; questo quoziente b si moltiplichi pel divisore, ed il prodotto $ab+bb$ si sottragga dal residuo, e siccome rimane zero, l'operazione è terminata, ed il quoziente cercato è $a+b$; perchè, come abbiamo veduto nell'operazione, questa quantità $a+b$ moltiplicata nel divisore diventa eguale al dividendo. In questo modo deve sempre procedere l'operazione, finchè non giunga ad un residuo $=0$. Acciò per altro essa riesca più facilmente, conviene *ordinare* il dividendo ed il divisore per la medesima lettera, cioè disporli in modo, che il primo termine contenga quella lettera il più delle volte, e gli altri la contengano gradatamente meno. Così nell'esempio precedente il dividendo era ordinato per la lettera a, perchè il primo termine conteneva a due volte, il secondo una, il terzo nessuna.

Esempio II.

Si debba dividere $aa-bb$ per $a+b$.

$$a+b\ )\ aa-bb\ (\ a-b$$
$$aa+ab$$
$$-ab-bb$$
$$-ab-bb$$
$$0$$

Esempio III.

Sia proposto di dividere $10ab+14ac+4aa+17bc+6bb+12cc$ per $3b+2a+4c$. Ordino prima queste quantità per la lettera a, con che esse diventano $4aa+10ab+14ac+17bc+6bb+12cc$, $2a+3b+4c$; poi faccio la divisione, come segue

$$2a+3b+4c)\ 4aa+10ab+14ac+17bc+6bb+12cc\ (2a+2b+3c$$
$$4aa+6ab+8ac$$
$$4ab+6ac+17bc+6bb+12cc$$
$$4ab+8bc+6bb$$
$$6ac+9bc+12cc$$
$$6ac+9bc+12cc$$
$$0$$

Alcune volte succede, che una quantità non si può dividere esattamente per un'altra: così la quantità $aa+bb$ non si può dividere per $a+b$, poichè se facciamo l'operazione come segue

$$\begin{array}{rll} a+b \;) & aa+bb & (\; a-b \\ & aa+ab & \\ \hline & -ab+bb & \\ & -ab-bb & \\ \hline & \quad 2bb & \end{array}$$

giungeremo al residuo $2bb$, il quale non si può più dividere per a. In questi casi la divisione soltanto si accenna in questa guisa $\frac{aa+bb}{a+b}$; la qual quantità, siccome ogni altra simile, in cui il dividendo non può esattamente dividersi pel divisore, si chiama *frazione*, e il dividendo *numeratore*, il divisore *denominatore* della frazione, ambedue poi considerati insieme si chiamano i *termini* della frazione. La divisione si accenna anche ne' modi seguenti, $(aa+bb):(a+b)$, o pure $\overline{aa+bb}:\overline{a+b}$, i quali equivalgono all'altro $\frac{aa+bb}{a+b}$, cioè esprimono la divisione di $aa+bb$ per $a+b$.

Si osservi che la frazione $\frac{aa+bb}{a+b}$ è $=a-b+\frac{2bb}{a+b}$, come risulta dall'operazione precedente. Così pure si rifletta, che come nella divisione esatta il quoziente moltiplicato nel divisore è eguale al dividendo; così quando la divisione non succede esattamente, il quoziente moltiplicato nel divisore insieme col residuo è eguale al dividendo. Nell'esempio precedente $a-b$ è il quoziente, $2bb$ il residuo, e quindi $(a-b)(a+b)+2bb=aa+bb$.

Prima d'inoltrarci più innanzi fermiamoci un momento per osservare la connessione, che passa tra le principali operazioni dell'Algebra, delle quali abbiamo adesso parlato. Il problema più semplice, che si possa proporre sulle quantità è il seguente: date due quantità a e b trovarne un'altra c che equivalga all'altre due prese insieme. La somma c'insegnerà a trovare questa quantità c in modo che sia $a+b=c$. Rimanendo sempre $a+b=c$ supponghiamo adesso che siano date a e c, e cerchiamo b, o sia quella quantità che bisogna aggiungere ad a,

perchè essa divenga eguale a c. Troveremo questa quantità b sottraendo a da c, in modo che sia $b = c - a$, perchè se aggiungiamo a da una parte e dall'altra avremo $b + a = c - a + a$ cioè $= c$, come doveva essere. Ecco adunque l'origine della sottrazione, la quale viene a bisogno quando s'inverte il problema che ha dato luogo alla somma.

Se si dovranno sommare più quantità eguali tra loro, la somma riescirà una operazione assai lunga, se il numero delle quantità eguali sarà molto grande, e non potrà eseguirsi se questo numero sarà indeterminato, come se si dovesse sommare un numero b di quantità eguali ad a. Ciò ha dato origine ad un altra operazione, cioè alla moltiplicazione, la quale c'insegna a trovare una quantità c che sia eguale ad un numero b di quantità eguali ad a. Si trova per mezzo di essa $c = ab$: ma se vorremo adesso che siano conosciute c ed a, e cercheremo la quantità b che moltiplicata per a ci dia il prodotto c, troveremo questa quantità b dividendo c per a, in modo che sarà $b = \frac{c}{a}$, perchè se moltiplichiamo da una parte e dall'altra per a, otterremo $ab = \frac{ac}{a}$, cioè $= c$, come avevamo supposto. La divisione pertanto ha la sua origine, allorchè s'inverte quel problema, che ha dato luogo alla moltiplicazione. Appena adunque si vuol cominciare a calcolare le quantità, si rendono subito necessarie le quattro principali operazioni, così dette, perchè da esse nascono tutte le diverse forme che posson prendere le quantità come vedremo in appresso.

CAPITOLO III.

Delle Frazioni.

10.

Quando la divisione non si può fare esattamente, essa si accenna, e le quantità che ne nascono si chiamano frazioni. Così $\frac{aa + bb}{a + b}$, $\frac{aa - cc}{aa + bb}$, $\frac{a}{b}$, e tutte le altre quantità, nelle quali la divisione non si può attualmente eseguire, sono frazioni, ed esprimono la divisione del numeratore cioè della quantità supe-

riore per il denominatore o per la quantità inferiore. Quelle medesime operazioni si fanno sulle frazioni, che sull'altre quantità, cioè la somma, la sottrazione, la moltiplicazione, e la divisione. Ma prima di trattar di queste, è necessario osservare alcune proprietà delle frazioni.

Se i termini di una frazione qualunque $\frac{a}{b}$ si moltiplicano ambedue per la medesima quantità c, la frazione $\frac{ac}{bc}$, che ne nasce, conserverà il medesimo valore $\frac{a}{b}$, che aveva prima. Poichè se il solo numeratore si moltiplicasse per c, la frazione $\frac{a}{b}$ cioè il quoziente di a divisa per b risulterebbe c volte maggiore, ma come si moltiplica per c anche il denominatore, il quoziente si ridurrà c volte minore, cioè rimarrà il medesimo di prima. Per render più sensibile che le due frazioni $\frac{a}{b}$ ed $\frac{ac}{bc}$ sono eguali, si moltiplichi la seconda per bc, e ne verrà ac, perchè la moltiplicazione per bc distrugge la divisione per bc: ora si moltiplichi anche la prima per bc, o sia prima per b e poi per c, e ne risulterà ac come sopra. Essendo dunque eguali i prodotti delle due frazioni per la medesima bc, anche le due frazioni devono essere eguali. Allorchè i termini di una frazione hanno qualche fattore comune, torna conto di toglier mediante la divisione questo fattore, perchè la frazione divenga più semplice. Questa operazione si chiama *riduzione* delle frazioni *ai minimi termini*. Così, siccome i due termini della frazione $\frac{aa+ab}{ab+bb}$ sono divisibili per $a+b$, convien fare la divisione, dalla quale si ottiene la frazione $\frac{a}{b}$, che ha il medesimo valore di prima, ma espresso più semplicemente. Ma per ottenere la forma la più semplice, che possa prendere una frazione, si deve cercare il massimo comun divisore del numeratore e del denominatore. Siano date adunque le due quantità A, B, delle quali si voglia il massimo comun divisore: si divida A per B, ed il residuo sia C. Ora se A e B hanno un divisore comune, avrà il medesimo divisore anche C; poichè (9) $A=Bq+C$ chia-

mando q il quoziente della divisione di A per B, e se r è un divisor comune di A e B, avremo $\frac{A}{r} = \frac{Bq}{r} + \frac{C}{r}$, e togliendo da una parte e dall'altra $\frac{Bq}{r}$ avremo $\frac{A}{r} - \frac{Bq}{r} = \frac{C}{r}$; ma $\frac{A}{r} - \frac{Bq}{r}$ è una quantità intera, dunque dovrà essere una quantità intera anche $\frac{C}{r}$, o sia C divisibile per r. Se adesso si divide B per C, e il residuo si chiama D, di nuovo D avrà quel medesimo divisore che hanno B e C, o sia A e B. E così continuate le divisioni, tutti i residui avranno quel medesimo divisore che cerchiamo. Onde se qualche divisione succede esattamente, o sia se qualche residuo diventa $= 0$, in tal caso l'ultima quantità che ha servito di divisore sarà il massimo comun divisore delle quantità A e B. E se le quantità A e B non avranno alcun fattore comune, quell' ultimo divisore sarà l' unità.

Acciò l'operazione più facilmente succeda, conviene osservare, che niuna mutazione si produce nel comun divisore delle quantità A e B, se una di esse si moltiplica o si divide per una quantità, che non sia un fattore dell'altra. Onde nel far le divisioni si possono rigettare quei fattori che moltiplicano solamente il dividendo o il divisore; inoltre il dividendo si può moltiplicare per qualunque quantità, purchè questa non sia un fattore del divisore.

Esempio I.

Si debba cercare il massimo comun divisore dei numeri 360, e 64. Si faccia la divisione continuamente come segue

```
64) 360 (5
    320
    ---
     40) 64 (1
         40
         --
         24) 40 (1
             24
             --
             16) 24 (1
                 16
                 --
                  8) 16 (2
                     16
                     --
                      0
```

e il divisore 8 che ci ha dato il residuo 0, sarà il massimo comun divisore dei numeri 360, e 64.

Esempio II.

Si debba trovare il massimo comun divisore delle quantità $aa+ab$, $ab+bb$. Siccome la prima ha il fattore a che non si trova nella seconda, e la seconda il fattore b che non ha la prima, rigetto questi fattori, e le quantità date diventano $a+b$, $a+b$, le quali essendo le stesse, è chiaro che il massimo comun divisore cercato sarà $a+b$.

Esempio III.

Siano adesso proposte le quantità $3aaa-4aab-9abb-18bbb$, $5aa-18ab+9bb$, delle quali si voglia il massimo comun divisore. La prima quantità adunque si deve divider per la seconda; ma poichè $3aaa$ non si può dividere per $5aa$, moltiplichiamo la prima per 5 che non è fattore della seconda. Fatta questa moltiplicazione la prima quantità diventa $15aaa-20aab-45abb-90bbb$, la quale divisa per la seconda ci dà $3a$ per quoziente, e $34aab-72abb-90bbb$, per residuo. Ora $5aa-18ab+9bb$ si deve dividere per $34aab-72abb-90bbb$, o sia (tolto da questa il fattore $2b$ che non è nella prima) per $17aa-36ab-45bb$. Acciò la divisione riesca, si moltiplichi la prima quantità per 17, il qual numero non divide la seconda, ed avremo $85aa-306ab+153bb$, la quale divisa per $17aa-36ab-45bb$ dà il quoziente 5, ed il residuo $-126ab+378bb$. Siccome nè $-b$ nè 126 son fattori del precedente divisore, dividiamo questo residuo per $-126b$, e diventerà $a-3b$. Dividiamo $17aa-36ab-45bb$ per $a-3b$, e siccome la divisione si fà esattamente, il massimo comun divisore cercato sarà $a-3b$. Ecco tutto il calcolo

$$5aa-18ab+9bb)\ 15aaa-20aab-45abb-90bbb\ (3a$$
$$17 \qquad\qquad 15aaa-54aab+27abb$$
$$2b)\ 34aab-72abb-90bbb$$
$$5)85aa-306ab+153bb \qquad (17aa-36ab-45bb$$
$$85aa-180ab-225bb$$
$$-126b)-126ab+378bb$$
$$a-3b)17aa-36ab-45bb(17a+15b$$
$$17aa-51ab$$
$$15ab-45bb$$
$$15ab-45bb$$
$$0$$

11.

Date le due frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ di diverso denominatore, se moltiplichiamo i termini della prima per d, e quei della seconda per b, in modo che esse diventino $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, il loro valore rimarrà il medesimo. Di quì si vede, come due frazioni salvo il loro valore si possono ridurre alla medesima denominazione. Si moltiplichino i termini di ciascuna pel denominatore dell'altra, e saranno così ridotte al medesimo denominatore. Se le frazioni saranno più di due, converrà moltiplicare i termini di ciascuna per tutti i denominatori delle altre. Così le tre frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ ridotte al medesimo denominatore diventeranno $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$. Questa operazione serve per paragonare tra loro le diverse frazioni: ridotte che siano alla medesima denominazione, quella sarà maggiore, che avrà un maggior numeratore.

12.

Per passare adesso alle principali operazioni delle frazioni si osservi, che per la natura della divisione la quantità $\frac{a+b}{c}$ equivale alle due quantità $\frac{a}{c}$, e $\frac{b}{c}$ prese insieme. Quindi la somma di due frazioni di egual denominatore è una frazione che ha per numeratore la somma de' due numeratori, e il medesimo denominatore delle frazioni date. Similmente essendo $\frac{a-b}{c}$ eguale alle due quantità $\frac{a}{c}$, e $\frac{-b}{c}$, si farà la sottrazione delle frazioni di egual denominatore dividendo la differenza dei numeratori pel comun denominatore. In conferma che le due quantità $\frac{a\pm b}{c}$, ed $\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}$ sono eguali, si rifletta che moltiplicando ciascuna di esse per c otteghiamo il medesimo prodotto $a\pm b$.

Se le frazioni saranno di diverso denominatore, prima di

far la somma o la sottrazione converrà ridurle al medesimo denominatore. Le due frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, ridotte ad egual denominatore diventano $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, e perciò la loro somma $=\frac{ad+bc}{bd}$, la differenza $=\frac{ad-bc}{bd}$. Se si dovrà prender la somma o la differenza tra una quantità intera c ed una frazione $\frac{a}{b}$, la quantità intera si scriverà a guisa di frazione così $\frac{c}{1}$, e riducendola al denominatore b diventerà $\frac{bc}{b}$; e perciò la somma si esprimerà scrivendo $c+\frac{a}{b}$, oppure $\frac{bc+a}{b}$: la differenza sarà $c-\frac{a}{b}$, o sia $\frac{bc-a}{b}$.

13.

Segue ancora dalla natura della divisione, che se una quantità a è moltiplicata prima per c, ed il prodotto diviso poi per b, noi otterremo il medesimo resultato, se divideremo prima a per b, e poi moltiplicheremo il quoziente per c. Quindi $\frac{ac}{b}$ indica tanto a moltiplicata per c e divisa poi per b, quanto a divisa prima per b e poi moltiplicata per c, cioè la frazione $\frac{a}{b}$ moltiplicata per c. Se dunque la frazione $\frac{a}{b}$ dovrà moltiplicarsi per c, il prodotto sarà $\frac{ac}{b}$, moltiplicato cioè il numeratore per c. È chiaro similmente, che avremo il medesimo resultato, se divideremo a subito per bc, o se la divideremo prima per b, e poi per c, cioè se divideremo la frazione $\frac{a}{b}$ per c. Ne segue che la frazione $\frac{a}{b}$ si divide per c scrivendo $\frac{a}{bc}$, cioè moltiplicando il denominatore per c. Onde se la frazione $\frac{a}{b}$ si dovrà insieme moltiplicare per c e dividere per d, o sia se si dovrà moltiplicare per la frazione $\frac{c}{d}$, il prodotto sarà $\frac{ac}{bd}$, ove so-

no tra loro moltiplicati i numeratori, ed i denominatori. Si rileva ancora che le due quantità $\frac{ac}{bd}$, ed $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ sono eguali dall' osservare, che la prima moltiplicata per bd ci dà il prodotto ac, e la seconda moltiplicata per bd, o sia prima per b e poi per d, che è lo stesso, ci dà il medesimo prodotto ac.

Se la frazione $\frac{a}{b}$ si dovrà dividere per la frazione $\frac{c}{d}$, si rovescerà la frazione $\frac{c}{d}$ in modo che divenga $\frac{d}{c}$, e poi fatta la moltiplicazione con la prima, il prodotto $\frac{ad}{bc}$ sarà il quoziente cercato. Ciò è evidente, se si riflette che moltiplicato questo quoziente $\frac{ad}{bc}$ per $\frac{c}{d}$ ritorna la medesima quantità $\frac{a}{b}$, come prima della divisione.

CAPITOLO IV.

Delle Potenze.

14.

Abbiamo veduto che a moltiplicata per a dà per prodotto aa; aa moltiplicata per a dà per prodotto aaa, e così in infinito. Queste quantità a, aa, aaa, $aaaa$, ec. si chiamano *potenze* o *potestà* della quantità a, in modo che la prima potenza di a è a, la seconda aa, la terza aaa, ec., e la potenza si dice più *alta* quando è espressa per un maggior numero, e tale dicesi essere il suo grado, quale è il numero che la esprime. Sarebbe un grande incomodo l'esprimere una potenza molto alta nel modo che abbiamo usato finora, unendo cioè tante lettere, quante son necessarie per denotare quella potenza. Perciò gli Analisti hanno imaginata una espressione delle potenze molto più breve, ed hanno stabilito che per denotare una potenza qualunque di a si scrivesse solamente a con quel numero sovrapposto, che rappresenta il grado della potenza. Così la seconda potenza o il *quadrato* aa si scrive a^2, la terza o sia il *cubo* aaa si scrive a^3, la quarta potenza o il *quadrato—quadrato* a^4, la quinta a^5, la sesta a^6, e così in seguito. I numeri posti sopra le lettere si chiamano *esponenti*, e denotano il grado della potenza.

15.

La somma e la sottrazione delle potenze non hanno alcuna difficoltà, e si fanno nella medesima maniera che per le altre quantità, ma per la moltiplicazione e la divisione vi sono alcune regole che facilitano queste operazioni. Si debbano moltiplicare tra di loro le potenze a^3, a^4; io dico che il prodotto sarà a^7, ove l'esponente 7 è la somma degli esponenti 3 e 4: poichè $a^3 = aaa$, $a^4 = aaaa$, e perciò $a^3 \times a^4 = aaaaaaa = a^7$. Generalmente per avere il prodotto di a^m per a^n bisognerà scrivere a prima m volte, poi n volte, cioè in tutto $m+n$ volte, che equivale ad a^{m+n}. Pertanto due potenze della medesima quantità moltiplicate insieme danno un prodotto eguale ad una potenza, l'esponente della quale è la somma degli esponenti delle potenze date. Così

$$(a+b)^m . (a+b)^n = (a+b)^{m+n}, \ (a-b+c)^m . (a-b+c)^n = (a-b+c)^{m+n}.$$

16.

Una potenza divisa per un'altra dà per quoziente una potenza, che ha per esponente la differenza degli esponenti dati. Così a^5 divisa per a^3 dà per quoziente $a^{5-3} = a^2$, perchè $\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$, e in generale $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, come pure $\frac{(a+b)^m}{(a+b)^n} = (a+b)^{m-n}$. Merita particolare attenzione il caso, in cui una potenza si divide per una più alta di lei: si debba per esempio dividere a^3 per a^4, e per la regola precedente il quoziente sarà $a^{3-4} = a^{-1}$; così pure $\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{-2}$, $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$, ec. Ma qual'è il valore di queste potenze coll'esponente negativo? Si osservi in primo

luogo che una potenza coll'esponente zero cioè a^0 è sempre eguale all'unità, qualunque sia il valore di a, poichè $a^0=a^{1-1}=\frac{a}{a}$; ma $\frac{a}{a}$ è sempre $=1$; dunque $a^0=1$. Adesso si divida a^0 per a; sarà $\frac{a^0}{a}=\frac{1}{a}=a^{0-1}=a^{-1}$, così pure $\frac{a^0}{a^2}=\frac{1}{a^2}=a^{0-2}=a^{-2}$, $\frac{a^0}{a^3}=\frac{1}{a^3}=a^{0-3}=a^{-3}$, e generalmente $\frac{a^0}{a^n}=\frac{1}{a^n}=a^{0-n}=a^{-n}$, cioè una potenza coll'esponente negativo equivale all'unità divisa per la medesima potestà coll'esponente positivo.

17.

Ci si presenta adesso un nuovo problema, in cui si cerca ciò che far si debba per inalzare una quantità ad una data potenza. Primieramente se alla potenza m dovremo elevare la quantità semplice a, è chiaro che ciò otterremo scrivendo a^m. Similmente il prodotto di più lettere abc elevato alla potenza m sarà $a^m b^m c^m$. Ma se una potenza qualunque, come a^3, si dovrà inalzare ad un'altra potenza per esempio alla quarta, io dico che ciò si farà scrivendo $a^{3\times4}=a^{12}$. Poichè $a^3=aaa$, ed aaa elevata alla quarta potenza diventa $a^4.a^4.a^4$, o facendo le moltiplicazioni $a^{4+4+4}=a^{3\times4}=a^{12}$. Siccome il medesimo discorso ha luogo per qualunque altra potenza, è chiaro in generale che a^m inalzata alla potenza n è eguale ad a^{mn}, cioè ad una potenza, che ha per esponente il prodotto degli esponenti m ed n. Ne segue, che la quantità $a^3b^2c^4$ inalzata alla quinta potenza è $a^{15}b^{10}c^{20}$, e generalmente $a^m.b^n.c^p$ elevata alla potenza r è $=a^{mr}.b^{nr}.c^{pr}$. Così pure il binomio $a+b$ inalzato alla potenza m è $=(a+b)^m$, e di nuovo elevato alla potenza n diventa $(a+b)^{mn}$.

Siccome $\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^2}{b^2}\times\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^3}{b^3}\times\frac{a}{b}=\frac{a^4}{b^4}$, ec., è chia-

ro che avremo le potenze di una frazione, se a quelle inalzeremo tanto il numeratore, quanto il denominatore di essa, cioè sarà in generale $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

18.

Abbiamo veduto, che le potestà nascono dalla moltiplicazione di una quantità in se stessa tante volte, quante n'esprime l'esponente diminuito dell'unità. Quindi avremo le potenze del binomio $a+b$, se lo moltiplicheremo più volte in se stesso. Sarà dunque la seconda potestà del binomio $a+b$, cioè $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$, la terza cioè $(a+b)^3 =(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, ec. Ma se il binomio $a+b$ si dovesse inalzare ad una potenza molto alta, sarebbe lunga cosa ed intrigata l'eseguire tante moltiplicazioni. Quindi, siccome spesso occorre di dovere elevare il binomio ad una data potenza, hanno procurato gli Analisti di trovare un metodo, per cui questo inalzamento ottener si potesse senza l'incomodo di tante moltiplicazioni. Questo metodo ci sarà facile di rinvenire, se attentamente osserveremo l'ordine che regna ne' diversi termini delle potestà del binomio, le quali sono espresse nella Tavola seguente.

Tavola delle potenze del binomio.

$a + b$

$a^2+2ab+b^2$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

$a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$

ec.

la qual Tavola si forma con la continua moltiplicazione di $a+b$ in se stesso.

Si vede da questa Tavola, che in qualunque potestà del binomio il primo termine contiene a inalzata alla potenza corrispondente; così nella quinta potenza il primo termine è a^5,

nella sesta a^6, ec. Nel secondo termine vi è a inalzata alla data potenza diminuita di un'unità, e moltiplicata per b; nel terzo a inalzata ad una potenza minore di due unità della data, e moltiplicata per b^2. E così in seguito li esponenti di a vanno continuamente diminuendo di una unità, e quelli di b crescendo di una unità, in modo che la somma degli esponenti di a e di b in ciascun termine sia eguale all'esponente della potestà data, finchè finalmente nell'ultimo termine svanisca l'esponente di a, e quello di b divenga eguale al grado della potestà. Di quì nasce un metodo facilissimo per trovare tutti i termini delle potestà del binomio. Si scrivano le potenze di a decrescenti di una unità, in modo che la massima sia eguale alla potenza data del binomio, e la minima $=0$. Sotto a queste si scrivano le potenze di b, ma in ordine inverso, talmentechè la massima potenza di a corrisponda alla minima di b, e viceversa. Si moltiplichi ciascuna quantità superiore per l'inferiore corrispondente, e si avranno i termini della potestà cercata. Per esempio si debba cercare la sesta potestà del binomio $a+b$: si scrivano le potenze di a e di b come segue

$$a^6,\ a^5,\ a^4,\ a^3,\ a^2,\ a^1,\ a^0$$
$$b^0,\ b^1,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ b^5,\ b^6$$

e moltiplicando ciascun termine superiore per l'inferiore avremo, a motivo di $a^0=b^0=1$,

$$a^6,\ a^5b,\ a^4b^2,\ a^3b^3,\ a^2b^4,\ ab^5,\ b^6$$

i quali sono i termini della sesta potestà, come può riscontrarsi nella Tavola. Si debbano adesso trovare i termini della decima potenza del medesimo binomio: si scrivano le potenze di a e di b come qui sotto

$$a^{10},\ a^9,\ a^8,\ a^7,\ a^6,\ a^5,\ a^4,\ a^3,\ a^2,\ a,\ 1$$
$$1,\ b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ b^5,\ b^6,\ b^7,\ b^8,\ b^9,\ b^{10}.$$

e moltiplicandole tra loro avremo i termini cercati

$$a^{10},\ a^9b,\ a^8b^2,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ ab^9,\ b^{10}.$$

Generalmente se vorremo inalzare il binomio $a+b$ ad una potenza qualunque m, otterremo i termini di questa potenza scrivendo le potestà di a e di b come segue

$$a^m,\ a^{m-1},\ a^{m-2},\ a^{m-3},\ a^{m-4},\ a^{m-5},\ \text{ec.}$$
$$1,\ b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ b^5,\ \text{ec.}$$

le quali si devono continuare finchè l'esponente di a svanisca,

o ciò che è lo stesso, finchè l'esponente di b divenga $=m$, poi moltiplicando ciascuna potenza superiore per l'inferiore corrispondente avremo

$$a^m,\ a^{m-1}b,\ a^{m-2}b^2,\ a^{m-3}b^3,\ a^{m-4}b^4, \text{ ec.}$$

e saranno questi i termini cercati del binomio $a+b$ inalzato alla potenza m.

Ciascun termine delle potestà del binomio ha però avanti di se alcuni coefficienti numerici, per conoscere l'andamento de'quali è necessario porre la Tavola precedente sotto un'altra forma. Ma prima si osservi, che dopo il massimo coefficiente ritornano gli stessi coefficienti precedenti, ma con ordine inverso. Si renderà evidente che ciò dev'esser così, se si rifletta, che se avessimo preso il binomio $b+a$ invece di $a+b$, avremmo ottenute le medesime potenze scritte con ordine inverso, in modo che l'ultimo termine diventerebbe il primo, il penultimo diventerebbe il secondo, ec. Ora i coefficienti di una potenza di $b+a$ sono li stessi che quei di una eguale potenza di $a+b$, perchè questa si cangia in quella, sol che si muti a in b e b in a. Dunque in qualunque potenza del binomio $a+b$ l'ultimo termine ha il medesimo coefficiente che il primo, il penultimo l'istesso che il secondo, e così in seguito. Questa osservazione ci toglie la metà della fatica; poichè basta giungere nelle potestà pari fino al coefficiente medio, e nelle dispari fino al primo de'due medj, gli altri essendo i coefficienti già ritrovati presi inversamente.

Tavola II. delle potestà del binomio $a+b$.

$$a+b$$

$$a^2+2ab+\frac{2\cdot 1}{2}b^2$$

$$a^3+3a^2b+\frac{3\cdot 2}{2}ab^2+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 3}b^3$$

$$a^4+4a^3b+\frac{4\cdot 3}{2}a^2b^2+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3}ab^3+\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 3\cdot 4}b^4$$

$$a^5+5a^4b+\frac{5\cdot 4}{2}a^3b^2+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 3}a^2b^3+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 4}ab^4+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}b^5$$

ec.

Di qui apparisce, che in qualunque potestà il coefficiente del secondo termine è eguale all'esponente della potenza; il coefficiente del terzo è eguale all'esponente della potenza moltiplicato nel medesimo esponente diminuito di una unità e diviso per 2; il coefficiente del quarto è eguale a quello del terzo moltiplicato nell'esponente diminuito di due e diviso per 3, e gli altri coefficienti seguitano la medesima legge, cioè dipendono uno dall'altro nel medesimo ordine. Quindi senza l'incomodo delle moltiplicazioni si potranno facilmente determinare, tanto i termini, che i coefficienti di qualunque potenza del binomio $a+b$. Si debba per esempio ricercare la sesta potenza, e chiamando A, B, C, D, E, F i coefficienti dei termini in modo che sia $(a+b)^6=a^6+Aa^5b+Ba^4b^2+Ca^3b^3+Da^2b^4+Eab^5+Fb^6$, avremo per le cose precedenti

$$A=6$$
$$B=\frac{A\cdot5}{2}=\frac{6\cdot5}{2}=15$$
$$C=\frac{B\cdot4}{3}=\frac{15\cdot4}{3}=20$$
$$D=\frac{C\cdot3}{4}=\frac{20\cdot3}{4}=15$$
$$E=\frac{D\cdot2}{5}=\frac{15\cdot2}{5}=6$$
$$F=\frac{E\cdot1}{6}=\frac{6\cdot1}{6}=1$$

Onde sarà $(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$.

Si può anche da ciò dedurre quello che far convenga per avere una qualunque potestà indeterminata m del binomio $a+b$. Supponghiamo che A, B, C, D, E, ec. siano i coefficienti di questa potestà, e troveremo con la regola precedente

$$A=m$$
$$B=\frac{A(m-1)}{2}=\frac{m(m-1)}{2}$$
$$C=\frac{B(m-2)}{3}=\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot3}$$
$$D=\frac{C(m-3)}{4}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot3\cdot4}$$
$$E=\frac{D(m-4)}{5}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}$$

ec.

ove manifesta si rende la legge che osservano questi coefficienti, i quali perciò si possono continuare quanto piace. Siccome adunque abbiamo supposto

$$(a+b)^m = a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 + Da^{m-4}b^4 + \text{ec.}$$

avremo sostituendo i valori delle lettere A, B, C, ec.

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}a^{m-3}b^3$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3\,.\,4}a^{m-4}b^4 + \text{ec.}$$

in modo che il coefficiente di $a^{m-r}b^r$ sarà

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-r+1)}{2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\ldots\,r}$$

Questa elegantissima espressione si chiama la formola *Newtoniana* del binomio, perchè *Newton* n' è l'inventore. La dimostrazione, che ne abbiamo data, è appoggiata all'induzione, e perciò non è abbastanza esatta e rigorosa. Poichè, per quanto si prolunghi la Tavola II, non potremo mai esser del tutto certi, che la medesima regola si osservi nelle susseguenti potenze, che non sono comprese nella Tavola. Ma una maggiore accuratezza ottener potremo mediante il discorso seguente.

Supponghiamo, che la Tavola II sia stata verificata fino ad una data potenza dell'esponente n, cioè che ci siamo assicurati essere

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}a^{n-3}b^3 + \text{ec.}$$

io dico che la medesima regola avrà luogo anche per la potenza seguente, cioè sarà

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + (n+1)a^n b + \frac{(n+1)n}{2}a^{n-1}b^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{2\,.\,3}a^{n-2}b^3 + \text{ec.}$$

Infatti se moltiplichiamo il valore di $(a+b)^n$ per $a+b$, otterremo la potenza $(a+b)^{n+1}$, la quale sarà

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + na^n b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-1}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}a^{n-2}b^3 + \text{ec.}$$
$$+ a^n b + na^{n-1}b^2 + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^3 + \text{ec.}$$

Ora $\frac{n(n-1)}{2}+n=n\left(\frac{n-1}{2}+1\right)=\frac{(n+1)n}{2}$,

$\frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n-2}{3}+1\right)=\frac{(n+1)n(n-1)}{2\,.\,3}$, e generalmente $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{2\,.\,3\ldots\ldots r}+\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{2\,.\,3\ldots(r-1)}$

$=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{2\,.\,3\ldots(r-1)}\left(\frac{n-r+1}{r}+1\right)=\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-r+2)}{2\,.\,3\ldots\ldots r}$.

Quindi, sostituendo questi valori, avremo

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+(n+1)a^{n}b+\frac{(n+1)n}{2}a^{n-1}b^{2}+\text{ec.}$$

lo che doveva provarsi. Pertanto, se la formula *Newtoniana* si verifica in una data potenza, essa avrà luogo anche nella potenza seguente. E siccome è certamente vera nelle prime potenze, lo sarà egualmente in tutte le altre.

19.

L'uso di questa formula non è però ristretto alle sole potenze del binomio, ma si estende alle potenze di qualunque polinomio. Si abbia in primo luogo il trinomio $a+b+c$, il quale debba inalzarsi alla potenza m; si ponga $a+b=p$, e sarà

$$(p+c)^{m}=p^{m}+mp^{m-1}c+\frac{m(m-1)}{2}p^{m-2}c^{2}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}p^{m-3}c^{3}+\text{ec.}$$

Ma siccome $p=a+b$, avremo

$$p^{m}=(a+b)^{m}=a^{m}+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^{2}+\text{ec.}$$
$$p^{m-1}=a^{m-1}+(m-1)a^{m-2}b+\frac{(m-1)(m-2)}{2}a^{m-3}b^{2}+\text{ec.}$$
$$p^{m-2}=a^{m-2}+(m-2)a^{m-3}b+\text{ec.}$$
$$p^{m-3}=a^{m-3}+(m-3)a^{m-4}b+\text{ec.}$$

ec.

Sostituendo questi valori nella espressione precedente avremo $(p+c)^{m}$, cioè $(a+b+c)^{m}$ espresso dalla formula

$$a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}a^{m-3}b^3 + \text{ec.}$$
$$+ mc\left(a^{m-1} + (m-1)a^{m-2}b + \frac{(m-1)(m-2)}{2}a^{m-3}b^2 + \text{ec.}\right)$$
$$+ \frac{m(m-1)}{2}c^2\left(a^{m-2} + (m-2)a^{m-3}b + \text{ec.}\right)$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}c^3\left(a^{m-3} + (m-3)a^{m-4}b + \text{ec.}\right)$$
$$+ \text{ec.}$$

ove si deve continuare qualunque linea tanto orizzontalmente quanto verticalmente, finchè il coefficiente di qualche termine diventi zero. Sia per dare un esempio $m=3$, o sia si cerchi la terza potenza del binomio $a+b+c$. Avremo $(a+b+c)^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3c(a^2+2ab+b^2)+3c^2(a+b)+c^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$.

Coll'istesso metodo si potrà elevare a qualunque potenza il quadrinomio $a+b+c+d$. Facciamo $a+b+c=q$, ed avremo $(a+b+c+d)^m$ cioè

$$(q+d)^m = q^m + mq^{m-1}d + \frac{m(m-1)}{2}q^{m-2}d^2 + \text{ec.}$$

Ora essendo $q=a+b+c$, se sostituiremo in questa formula i valori di q^m, q^{m-1} ec. trovati di sopra, avremo la richiesta potenza $(a+b+c+d)^m$. In simil guisa condurremo il calcolo per elevare ad una data potenza un polinomio qualunque, riducendolo sempre ad un polinomio inferiore, il quale cioè contenga un minor numero di termini.

20.

Abbiamo inalzato il binomio $a+b$ alla potenza m; ma come potrà ciò eseguirsi, quando il secondo termine di esso sarà negativo, cioè quando il binomio sarà $a-b$? Noi potremmo invero risolvere questo problema col medesimo metodo, col quale abbiamo trovate le potenze di $a+b$; ma sarà più breve il dedurre la formula della potenza $(a-b)^m$ dalla precedente. A ciò fare convien rammentarsi, che due quantità negative moltiplicate tra loro danno un prodotto positivo: quindi siccome la seconda potestà di $-b$ si trova moltiplicando quella quantità $-b$

in se stessa, sarà questa seconda potestà $=b^2$, l'istessa appunto che si ha nel caso di b positiva. Ma la terza potenza nasce dal moltiplicare la seconda b^2 per $-b$, onde riesce negativa, ed $=-b^3$. Nella stessa guisa sarà $(-b)^4=b^4$, $(-b)^5=-b^5$, $(-b)^6=b^6$, ec. dal che apparisce che delle potestà della quantità negativa $-b$ la prima, la terza, la quinta, e le altre dispari son tutte negative, la seconda, la quarta, la sesta e tutte le pari son positive. Quindi allorchè b si cangia in $-b$, le potestà pari non soffrono alcuna mutazione, ma le dispari divengono negative.

Ciò premesso, sarà facile adesso l'esprimere la potenza $(a+b)^m$. Poichè essendo

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}a^{m-3}b^3 + \text{ec.}$$

e mutandosi $(a+b)^m$ in $(a-b)^m$, quando b si cangia in $-b$, troveremo il cercato valore di $(a-b)^m$, se nella formula precedente scriveremo $-b$ in luogo di b. Ma siccome mediante questa mutazione le potenze dispari di b diventano negative, rimanendo le stesse le potestà pari, il primo termine, il terzo, e gli altri dispari rimarranno li stessi, il secondo, il quarto, e gli altri pari diventeranno negativi. Sarà dunque

$$(a-b)^m = a^m - ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}a^{m-3}b^3 + \text{ec.}$$

Le due formule trovate per le potestà de' binomj $a+b$, ed $a-b$ si possono riunire in una sola come segue;

$$(a\pm b)^m = a^m \pm ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}a^{m-3}b^3 + \text{ec.}$$

ove il segno ambiguo $\pm$ si deve intendere in modo, che il segno superiore abbia luogo quando b è positiva, l'inferiore quando b è negativa.

CAPITOLO V.

Dei Radicali.

21.

Quella quantità, che moltiplicata più volte in se stessa produce una potenza, si chiama la di lei *radice*, e riceve il suo nome o il suo *esponente* dal numero delle volte accresciuto dell'unità, nelle quali è moltiplicata in se stessa per produrre la potenza. Così se è moltiplicata una sola volta in se stessa, si chiama radice seconda o *quadrata*, se due volte radice terza o *cubica*, se tre volte, radice quarta, o *quadrato-quadrata*, se quattro volte, radice quinta, e così in seguito. È dunque a la radice quadrata di a^2, la cubica di a^3, la quarta di a^4, la quinta di a^5, ec. e così pure a^2 è la radice quadrata di a^4, la terza di a^6, la quarta di a^8, ec. Viceversa, della medesima potenza a^{12} la radice quadrata è a^6, la cubica a^4, la quarta a^3, la sesta a^2, la duodecima a. Generalmente di qualunque potestà a^m la radice quadrata è $a^{\frac{m}{2}}$, la cubica $a^{\frac{m}{3}}$, la quarta $a^{\frac{m}{4}}$ e in generale la radice dell'esponente n è $a^{\frac{m}{n}}$. Si avrà perciò qualunque radice di una data potestà, se l'esponente della potestà si dividerà per l'esponente della radice.

Di quì apparisce, che avremo la vera radice di una potestà, ogniqualvolta il di lei esponente sarà divisibile per l'esponente della radice, poichè in tal caso $a^{\frac{m}{n}}$ sarà una potenza di a. Ma se m non si può dividere per n, allora non si potrà ottener la radice; così la radice quadrata di a^5 non può aversi, perchè il 5 non si può dividere per 2. Nè ciò deve far maraviglia, purchè si rifletta che non vi è alcuna potenza di a, che moltiplicata in se stessa formi il prodotto a^5.

Ma quantunque queste radici siano inassegnabili, pure siccome spesso s'incontrano, e sono di un grand' uso nell'Analisi, si considerano con tutta l'attenzione, e si dà ad esse il nome di

radicali. I radicali adunque sono quelle potestà che hanno per esponente un numero rotto, come $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$, $a^{\frac{7}{4}}$, ec. Ciò si deve intendere anche delle quantità complesse, come sarebbe $(a+b)^{\frac{1}{2}}$ che indica la radice quadrata di $a+b$, $(3a+3b)^{\frac{2}{3}}$, che indica la radice cubica di $(3a+3b)^2$, e le altre simili.

Le quantità radicali si esprimono anche in un'altra maniera, ponendo cioè avanti ad esse il segno $\sqrt{}$, che rappresenta la radice. E per denotare le diverse specie di radici, nel segno $\sqrt{}$ si scrive l'esponente della radice in modo, che $\sqrt[3]{}$ indica la radice cubica, $\sqrt[4]{}$ la radice quarta, $\sqrt[5]{}$ la radice quinta, e così in seguito; quando poi il segno $\sqrt{}$ non ha alcun numero, s'intende sempre che rappresenti la radice quadrata. Sarà dunque $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{(a+b)^3}=(a+b)^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{bc^2}=\overline{bc^2}^{\frac{1}{3}}=b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{a^2bc^3}=\overline{a^2bc^3}^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{4}}$. La prima operazione da farsi su' radicali, consiste nella loro riduzione alla più semplice espressione; da questa perciò cominceremo.

22.

Essendo $\sqrt[n]{ab^n}=\overline{ab^n}^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b=b\sqrt[n]{a}$, se qualche fattore della quantità posta sotto il segno radicale avrà per esponente l'esponente medesimo della radice, si potrà fare uscir fuori del segno. Così essendo $\sqrt{48a^2bc}=\sqrt{4^2a^2.3bc}$, questo radicale si scriverà più semplicemente così; $4a\sqrt{3bc}$. Così ancora

$$\sqrt[3]{(a^3b-a^3c)}=\sqrt[3]{a^3(b-c)}=a\sqrt[3]{(b-c)},$$

$$\sqrt[4]{(a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6)}$$

$$=\sqrt[4]{(a+b)^6}=\sqrt[4]{(a+b)^4(a+b)^2}=(a+b)\sqrt[4]{(a+b)^2}$$

$$=(a+b)(a+b)^{\frac{2}{4}}=(a+b)(a+b)^{\frac{1}{2}}=(a+b)\sqrt{(a+b)}.$$

23.

Per paragonare tra loro i radicali di diversa denominazione, convien ridurli al medesimo esponente. Dati i due radicali $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[q]{b^p}$ si possono anche esprimer così, $a^{\frac{m}{n}}$, $b^{\frac{p}{q}}$; gli esponenti $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ ridotti al medesimo denominatore diventeranno $\frac{mq}{nq}$, $\frac{np}{nq}$, ed i radicali proposti saranno $a^{\frac{mq}{nq}}$, $b^{\frac{np}{nq}}$, o sia $\sqrt[nq]{a^{mq}}$, $\sqrt[nq]{b^{np}}$, che adesso hanno il medesimo esponente. E siccome le frazioni ridotte al medesimo denominatore rimangono le stesse, si manterrà l'istesso valore agli esponenti fratti di ciascun radicale, e perciò ai radicali medesimi, allorchè son ridotti a comune denominatore. Dati pertanto i due radicali $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[q]{b^p}$, i quali debbano ridursi al medesimo esponente, si moltiplicheranno tra loro i due esponenti n, q, ed il prodotto nq sarà l'esponente comune ai due radicali, e l'esponente m della quantità a^m sotto il segno del primo radicale si moltiplicherà per l'esponente q del secondo radicale, e viceversa.

24.

Venghiamo adesso alle quattro principali operazioni su'radicali, e siccome per riguardo alla somma ed alla sottrazione non vi è alcuna particolarità da notarsi, passiamo subito alla moltiplicazione. Si debbano moltiplicare tra loro i due radicali dell'istesso esponente $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$; questi equivalgono ad $a^{\frac{1}{n}}$, $b^{\frac{1}{n}}$, le quali quantità moltiplicate ci danno il prodotto $a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}$, e rimettendo il segno radicale $\sqrt[n]{ab}$. Quindi si ha il prodotto de'radicali del medesimo nome lasciando intatto l'esponente, e moltiplicando le quantità poste sotto il segno. Per mostrare la moltiplicazione delle quantità radicali complesse daremo i seguenti esempj.

Esempio I.

Si debbano moltiplicare tra loro le quantità seguenti

$$\begin{array}{llll}
a & +\sqrt{a} - \sqrt{(a+b)} & & \\
2a & -\sqrt{a} + 2\sqrt{(a+b)} & & \\
\hline
2a^2 & +2a\sqrt{a} - 2a\sqrt{(a+b)} & & \\
 & -\; a\sqrt{a} & -\sqrt{a^2} + \sqrt{a(a+b)} & \\
 & \quad +2a\sqrt{(a+b)} & +2\sqrt{a(a+b)} - 2\sqrt{(a+b)^2} & \\
\hline
2a^2 & +\; a\sqrt{a} & -\sqrt{a^2} + 3\sqrt{a(a+b)} - 2\sqrt{(a+b)^2} &
\end{array}$$

Questo è il prodotto cercato, il quale ridotti i radicali diventa $2a^2+a\sqrt{a}-a+3\sqrt{a(a+b)}-2a-2b$, o sia $2a^2-3a-2b+a\sqrt{a}+3\sqrt{a(a+b)}$.

Esempio II.

Le quantità da moltiplicarsi siano $a+2\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$, $4a-3\sqrt{a}+2\sqrt[3]{b}$, le quali ridotti i radicali al medesimo esponente diventano $a+2\sqrt[6]{a^3}+\sqrt[6]{b^2}$, $4a-3\sqrt[6]{a^3}+2\sqrt[6]{q^2}$, adesso si faccia la moltiplicazione come segue.

$$\begin{array}{lll}
a & +2\sqrt[6]{a^3} + \sqrt[6]{b^2} & \\
4a & -3\sqrt[6]{a^3} + 2\sqrt[6]{b^2} & \\
\hline
4a^2 & +8a\sqrt[6]{a^3} + 4a\sqrt[6]{b^2} & \\
 & -3a\sqrt[6]{a^3} & -6\sqrt[6]{a^6} - 3\sqrt[6]{a^3b^2} \\
 & \quad +2a\sqrt[6]{b^2} & +4\sqrt[6]{a^3b^2} + 2\sqrt[6]{b^4} \\
\hline
4a^2 & +5a\sqrt[6]{a^3} + 6a\sqrt[6]{b^2} & -6\sqrt[6]{a^6} + \sqrt[6]{a^3b^2} + 2\sqrt[6]{b^4}
\end{array}$$

o sia $4a^2+5a\sqrt{a}+6a\sqrt[3]{b}-6a+\sqrt[6]{a^3b^2}+2\sqrt[3]{b^2}$.

La divisione de' radicali del medesimo nome si fa come se le quantità non fossero sotto il segno radicale. Infatti, essendo

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[n]{b}=b^{\frac{1}{n}}$ avremo $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

Per la divisione de'radicali complessi si osservino i seguenti esempj.

ESEMPIO I.

Si debba dividere la quantità $2a^2-2a+12\sqrt{ab}-18b$ per $a+\sqrt{a}-3\sqrt{b}$.

$$
\begin{array}{l}
a+\sqrt{a}-3\sqrt{b})\,2a^2-2a+12\sqrt{ab}-18b\,(2a-2\sqrt{a}+6\sqrt{b}\\
\qquad\qquad\underline{2a^2+2a\sqrt{a}-6a\sqrt{b}}\\
\qquad\qquad\quad -2a\sqrt{a}-2a+6a\sqrt{b}+12\sqrt{ab}-18b\\
\qquad\qquad\quad \underline{-2a\sqrt{a}-2a\qquad\qquad+6\sqrt{ab}}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 6a\sqrt{b}+6\sqrt{ab}-18b\\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{6a\sqrt{b}+6\sqrt{ab}-18b}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

ESEMPIO II.

La quantità $6a-\sqrt[6]{a^3b^2}-12\sqrt[3]{b^2}$ debba dividersi per $2\sqrt{a}-3\sqrt[3]{b}$.

$$
\begin{array}{l}
2\sqrt{a}-3\sqrt[3]{b}\,)\,6a-\sqrt[6]{a^3b^2}-12\sqrt[3]{b^2}\,(\,3\sqrt{a}+4\sqrt[3]{b}\\
\qquad\qquad\underline{6a-9\sqrt[6]{a^3b^2}}\\
\qquad\qquad\quad 8\sqrt[6]{a^3b^2}-12\sqrt[3]{b^2}\\
\qquad\qquad\quad \underline{8\sqrt[6]{a^3b^2}-12\sqrt[3]{b^2}}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Facilmente si comprende, come debba farsi la moltiplicazione, e la divisione tra quei radicali, che si chiamano *universali*, ne' quali la quantità sotto il segno è un radicale complesso. Si riducano prima questi radicali al medesimo esponente, poi tolto il segno universale, cioè quello che comprende tutta

la quantità, si faccia la moltiplicazione o la divisione come sopra, ed il prodotto o il quoziente si riponga sotto il segno universale. Ecco un esempio della moltiplicazione. Si debbano moltiplicar tra loro le quantità $\sqrt[3]{(a-2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b})}$, $\sqrt[3]{(2a+3\sqrt{a}-4\sqrt[3]{b})}$. Tolto il segno universale si faccia la moltiplicazione come segue.

$$\begin{array}{l}
a-2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \\
2a+3\sqrt{a}-4\sqrt[3]{b} \\
\hline
2a^2-4a\sqrt{a}+6a\sqrt[3]{b} \\
\quad +3a\sqrt{a} \qquad\qquad -6a+9\sqrt[6]{a^3b^2} \\
\qquad\qquad -4a\sqrt[3]{b} \quad +8\sqrt[6]{a^3b^2}-12\sqrt[3]{b^2} \\
\hline
2a^2-a\sqrt{a}+2a\sqrt[3]{b}-6a+17\sqrt[6]{a^3b^2}-12\sqrt[3]{b^2}
\end{array}$$

ed il prodotto cercato sarà

$$\sqrt[3]{(2a^2-a\sqrt{a}+2a\sqrt[3]{b}-6a+17\sqrt[6]{a^3b^2}-12\sqrt[3]{b^2})}.$$

Siccome $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$, sarà $(\sqrt[n]{a})^p=a^{\frac{p}{n}}$, e restituito il segno radicale $(\sqrt[n]{a})^p=\sqrt[n]{a^p}$; cioè per inalzare un radicale ad una data potenza, conviene a quella potenza elevare la quantità posta sotto il segno radicale.

Ma per estrarre una data radice da un radicale bisognerà moltiplicare per l'esponente della radice data l'esponente del radicale. Infatti essendo $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$, e per estrarre la radice di una potestà dovendosi l'esponente della potestà dividere per l'esponente della radice sarà $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[np]{a}$. Quindi sarà

$$\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a},\ \sqrt{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a}}=\sqrt[6]{a},\ \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[24]{a}.$$

25.

Alcune volte succede, che dalle quantità complesse si può esattamente estrarre la radice, in modo che svaniscono allora i segni radicali; e la quantità proposta prende una forma più semplice. Convien dunque mostrare il metodo da tenersi per estrarre queste radici, quando ciò è possibile. E per incominciare dalla radice quadrata, siccome la quantità $a^2+2ab+b^2$ è un quadrato, di cui la radice è $a+b$, è chiaro che otterremo questa radice allorchè ci è incognita, se estraendo la radice dal primo termine a^2, la quale è a, pel doppio di essa o sia per $2a$ divideremo il secondo termine $2ab$, poichè il quoziente sarà b, cioè l'altro termine della radice. Di quì apparisce quel metodo che cercavamo, il quale schiariremo negli esempj seguenti.

Esempio I.

Si debba estrarre la radice quadrata dalla quantità $60ab+36a^2+25b^2$. Primieramente ordino questa quantità per a come segue

$$\begin{array}{ll} 36a^2+60ab+25b^2 & (\quad 6a+5b \\ \underline{36a^2\qquad\qquad\qquad} & \quad 12a \\ \qquad 60ab+25b^2 & \\ \underline{36a^2+60ab+25b^2} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

Poi prendo la radice quadrata $6a$ del primo termine $36a^2$, e la scrivo a parte; questa radice $6a$ inalzata al quadrato mi dà $36a^2$ che sottraggo dalla quantità proposta, ed ottengo il residuo $60ab+25b^2$. Adesso prendo il doppio $12a$ della radice trovata, e per esso divido il primo termine $60ab$ del residuo. Scrivo per radice il quoziente $5b$; poi inalzando al quadrato la radice trovata $6a+5b$ ottengo la quantità $36a^2+60ab+25b^2$, la quale sottratta dalla proposta siccome non mi lascia alcun residuo, l'operazione è terminata, e la radice cercata è $6a+5b$.

Esempio II.

Si voglia la radice quadrata della quantità
$4a^2-12ab+16ac+9b^2-24bc+16c^2$.

$$\begin{array}{l|l}
4a^2-12ab+16ac+9b^2-24bc+16c^2 & (\ 2a-3b+4c \\
4a^2 & 4a-3b \\
\hline
-12ab+16ac+9b^2-24bc+16c^2 & 4a-6b+4c \\
-12ab \quad +9b^2 & \\
\hline
16ac \quad -24bc+16c^2 & \\
16ac \quad -24bc+16c^2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Estratta la radice $2a$ dal primo termine $4a^2$, ne sottraggo il quadrato $4a^2$ dalla proposta quantità ed ho il residuo $-12ab+16ac+9b^2-24bc+16c^2$. Prendo il doppio $4a$ della radice trovata, e per questo dividendo il primo termine del residuo $-12ab$ ho il quoziente $-3b$, che è il secondo termine della radice. Alzo al quadrato la radice finora trovata $2a-3b$, e tolgo $(2a-3b)^2$ dalla quantità proposta, o pure $(2a-3b)^2-4a^2=-3b(4a-3b)$ dal residuo, perchè $4a^2$ fu già sottratto, ed ottengo il secondo residuo $16ac-24bc+16c^2$. Divido questo per $4a-6b$ doppio della radice trovata, ed il quoziente $4c$ mi dà il terzo termine della radice. Di nuovo sottraggo la radice $2a-3b+4c$ elevata al quadrato dalla quantità proposta, o pure sottraggo $(2a-3b+4c)^2-(2a-3b)^2=4c(4a-6b+4c)$ dall' ultimo residuo, e siccome nulla rimane, la radice cercata sarà $2a-3b+4c$.

In egual maniera dalle cose precedenti si potrà ricavare il metodo da usarsi per estrarre qualunque radice. Poichè essendo $a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+$ec. la potenza di esponente n della quantità $a+b$, se data la potenza questa radice fosse incognita, si troverebbe prima estraendo la radice n.esima dal primo termine a^n che sarà a, poi dividendo il secondo termine per na^{n-1}, cioè per la radice già trovata inalzata alla potenza $n-1$, e moltiplicata per n, perchè il quoziente b sarebbe l'altro termine della radice.

26.

Ma lasciando queste cose da parte passiamo ad altre più utili. Da ciò che abbiamo veduto della natura delle potestà è chiaro, che non tutte le quantità son potenze; onde spesso succede che invano tentiamo di estrarre le radici, e siamo condot-

ti a quantità radicali. Così non essendovi alcun numero o intero o fratto, che moltiplicato in se stesso dia un prodotto eguale a 2, non si potrà estrarre la radice quadrata dal 2, e non si saprà mai cosa sia in numeri la quantità $\sqrt{2}$. L'istesso si deve intendere delle altre quantità radicali, le quali non si sa qual rapporto abbiano esattamente in numeri ad altre quantità cognite. Perciò esse si chiamano ancora *incommensurabili*, poichè non hanno una misura comune con altre quantità note.

Ma siccome queste quantità radicali spesso s'incontrano nella soluzione de' problemi, e da esse dipende il valore delle quantità che si cercano, perciò hanno procurato gli Analisti di ottenere il valor prossimo de' radicali, giacchè il vero ottener non potevano. Questa approssimazione è di un grand'uso, ed ha tanto maggior pregio, in quanto si accosta al vero valore come più piace, in modo che l'errore che si commette riesce così piccolo, come si vuole. Per far ciò bisogna ridurre il dato radicale in *serie*, cioè in una formula composta d'infiniti termini, i quali vadano sempre diminuendo. Ora siccome la serie continuata all'infinito dà il valore del radicale, quanti più termini prenderemo, tanto più ci accosteremo al vero valore, e quindi non vi è alcun limite all'approssimazione. Cerchiamo adunque come si svolgono in serie i radicali.

Siccome i radicali si possono considerare come potestà di esponente fratto, la quantità $\sqrt[n]{(a+b)^m}$ si può esprimere per $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, cioè pel binomio $a+b$ inalzato alla potenza $\frac{m}{n}$. Ora poichè abbiamo trovato di sopra essere

$$(a+b)^p = a + pa^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{2}a^{p-2}b^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{2\,.\,3}a^{p-3}b^3 + \text{ec.}$$

se facciamo $p=\frac{m}{n}$, avremo

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}a^{\frac{m-n}{n}}b + \frac{m(m-n)}{n\,.\,2n}a^{\frac{m-2n}{n}}b^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n\,.\,2n\,.\,3n}a^{\frac{m-3n}{n}}b^3 + \text{ec.}$$

la qual formula và all'infinito, perchè $\frac{m}{n}$ è una frazione.

Ma in questa serie ritroviamo le quantità $a^{\frac{m}{n}}, a^{\frac{m-n}{n}}, a^{\frac{m-2n}{n}}$, ec. le quali sono radicali, onde pare a prima vista che poco vantaggio da questo metodo ricavar si possa, poichè esso ci dà il radicale $\sqrt[n]{(a+b)^m}$ espresso per altri radicali. Ma è facile il vedere che questi spariranno, se per a prenderemo una qualunque quantità elevata alla potenza n. Perchè posta $a=c^n$ sarà $a^{\frac{m}{n}}=c^m$, $a^{\frac{m-n}{n}}=c^{m-n}$, $a^{\frac{m-2n}{n}}=c^{m-2n}$ ec. e sostituiti questi valori

$$\sqrt[n]{(c^n+b)^m}=c^m+\frac{m}{n}c^{m-n}b+\frac{m(m-n)}{n.2n}c^{m-2n}b^2$$
$$+\frac{m(m-n)(m-2n)}{n.2n.3n}c^{m-3n}b^3+\text{ec.}$$

Se adesso facciamo $m=1$, ed $n=2$, 3, 4, ec. avremo le serie seguenti per l'estrazione della radice quadrata, cubica, quarta ec.

$$\sqrt{(c^2+b)}=c+\frac{1b}{2c}-\frac{1.1b^2}{2.4c^3}+\frac{1.1.3b^3}{2.4.6c^5}-\frac{1.1.3.5b^4}{2.4.6.8c^7}+\text{ec.}$$
$$\sqrt[3]{(c^3+b)}=c+\frac{1b}{3c^2}-\frac{1.2b^2}{3.6c^5}+\frac{1.2.5b^3}{3.6.9c^8}-\frac{1.2.5.8b^4}{3.6.9.12c^{11}}+\text{ec.}$$
$$\sqrt[4]{(c^4+b)}=c+\frac{1b}{4c^3}-\frac{1.3b^2}{4.8c^7}+\frac{1.3.7b^3}{4.8.12c^{11}}-\frac{1.3.7.11b^4}{4.8.12.16c^{15}}+\text{ec.}$$
ec.

Quando dunque si vuole estrarre la radice n.esima da una data quantità, conviene questa quantità dividere in due parti, una delle quali sia una potenza dell'esponente n, e poi far uso delle serie precedenti.

Prima però di farne l'applicazione a qualche caso particolare, importa molto il notare alcune cose. Delle serie altre sono *convergenti* altre *divergenti*; in queste i termini vanno tanto più crescendo, quanto più si allontanano dal primo, in quelle i termini vanno continuamente diminuendosi. Le sole serie convergenti possono adoprarsi per le approssimazioni; perchè l'approssimazione è appoggiata a questo principio, che somma-

ti alcuni de' primi termini gli altri possono come piccolissimi trascurarsi. Ora ciò non può farsi nelle serie divergenti, perchè in paragone de' primi non si possono lasciare da parte i termini seguenti, i quali sono maggiori di quelli o per lo meno eguali. Vediamo adunque quando le serie di sopra trovate sono convergenti, quando divergenti. È chiaro che i termini di queste serie crescono crescendo b, diminuiscono crescendo c: onde se b sarà minore di c le serie saranno convergenti. Il numero dal quale dev' estrarsi la radice, si deve perciò dividere in due parti c^n, e b, in modo che c non sia minore di b, e quanto più grande sarà c riguardo a b, tanto più convergente sarà la serie, e un numero minore di termini sarà necessario per la cercata approssimazione.

Esempio I.

Si debba trovare prossimamente la radice quadrata del numero 2.

Il quadrato prossimamente inferiore al numero dato è l' unità, onde convien fare $c=1$, $b=1$. Sostituiti questi valori la serie diventerà

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1.1}{2.4}+\frac{1.3}{2.4.6}-\frac{3.5}{2.4.6.8}+\frac{3.5.7}{2.4.6.8.10}-\text{ec.}$$

la qual serie continuata all' infinito dà il vero valore di $\sqrt{2}$: per averne il valor prossimo bisogna sommare molti termini. Il primo termine 1 è vicino alla cercata radice, ma se prendiamo due termini $1+\frac{1}{2}$, o tre $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2.4}$, o quattro $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2.4}+\frac{3}{2.4.6}$, o cinque ec., ci accosteremo sempre più al vero valore di $\sqrt{2}$. Così le frazioni 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{23}{16}$, $\frac{179}{128}$, ec. danno il valore della radice cercata sempre più esatto, in modo però che la prima, la terza, e le altre poste in luogo dispari sono minori del vero, la seconda, la quarta, e le altre in posto pari maggiori del vero, come apparisce dalla forma della serie, nella quale cominciando dal secondo termine i segni sono alternativamente positivi e negativi.

Ma questa serie è poco convergente, e ciò è accaduto perchè i numeri c e b non differiscono tra loro. Per avere un' altra serie più convergente moltiplichiamo il numero 2 per un qua-

drato, per es. per 100, esarà $\sqrt{2}=\sqrt{\frac{200}{100}}$. Il quadrato prossimamente inferiore al numero 200 è 196, la cui radice è 14; onde $\sqrt{2}=\sqrt{\frac{14^2+4}{100}}=\sqrt{\frac{7^2+1}{25}}=\frac{1}{5}\sqrt{(7^2+1)}$. Facciamo adunque $c=7$, $b=1$, ed avremo

$$\sqrt{2}=\frac{1}{5}\left(7+\frac{1}{2.7}-\frac{1}{2.4.7^3}+\frac{3}{2.4.6.7^5}-\frac{3.5}{2.4.6.8.7^7}+\text{ec.}\right)$$

la qual serie è molto convergente, perchè presi solamente i primi quattro termini avremo la frazione $\frac{380299}{268912}$, o sia la frazione decimale 1, 414213, la quale non differisce dal vero nè pur di un milionesimo. L'istesso artifizio deve usarsi in generale per ottenere serie convergenti.

Esempio II.

Si debba estrarre la radice quadrata dal numero 15. Se io prendessi il quadrato inferiore che è 9, avrei $c=3$, $b=6$, e poichè $c<b$ avrei una serie divergente. Prendo perciò il quadrato superiore che è 16, ed ottengo $c=4$, $b=-1$, e sostituiti questi valori

$$\sqrt{15}=4-\frac{1}{2.4}-\frac{1}{2.4.4^3}-\frac{3}{2.4.6.4^5}-\frac{3.5}{2.4.6.8.4^7}-\text{ec.}$$

Questa serie è assai convergente, perchè presi due soli termini, cioè 4, e $-\frac{1}{8}$, ne nasce il valor prossimo $=\frac{31}{8}=3,875$, il quale non differisce dal vero nè pur di tre millesimi. Se è necessaria maggiore esattezza, converrà prendere tre, o più termini.

Abbiamo supposto che la formula del binomio abbia luogo nell'inalzamento a potenze di esponente rotto. La dimostrazione, che abbiamo data del teorema *Newtoniano*, essendo per induzione dedotta dalla osservazione de' casi particolari, potrà ammettersi per le potenze di esponente intero, ma per quelle di esponente fratto converrà appoggiarla a qualche nuova ragione. Sia dunque

$$p=\frac{mb}{na}+\frac{m(m-n)b^2}{n.2na^2}+\frac{m(m-n)(m-2n)b^3}{n.2n.3na^3}+\text{ec.}$$

io dico che sarà $\left(1+\frac{b}{a}\right)^m=(1+p)^n$. Poichè

$$(1+p)^n=1+np+\frac{n(n-1)}{2}p^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}p^3+\text{ ec.}$$

Ora se prendiamo le potenze di p avremo

$$p^2=\frac{m^2b^2}{n^2a^2}+\frac{2m^2(m-n)b^3}{n^2.2na^3}+\text{ ec.}$$

$$p^3=\frac{m^3b^3}{n^3a^3}+\text{ ec.}$$

ec.

e sostituendo questi valori avremo $(1+p)^n$ espresso dalla formula

$$1+\frac{mb}{a}+\frac{m(m-n)b^2}{2na^2}+\frac{m(m-n)(m-2n)b^3}{2n.3na^3}+\text{ ec.}$$

$$+\frac{m^2(n-1)b^2}{2na^2}+\frac{2m^2(m-n)(n-1)b^3}{2n.2na^2}+\text{ ec.}$$

$$+\frac{m^3(n-1)(n-2)b^3}{2.3n^2a^3}+\text{ ec.}$$

e riducendo i termini simili dalla formula

$$1+m\frac{b}{a}+\frac{m^2-m}{2}.\frac{b^2}{a^2}+\frac{m^3-3m^2+2m}{6}.\frac{b^3}{a^3}+\text{ ec.}$$

o finalmente dalla formula

$$1+m\frac{b}{a}+\frac{m(m-1)}{2}.\frac{b^2}{a^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}.\frac{b^3}{a^3}+\text{ ec.}$$

Questa esprime il valore di $\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$; dunque $(1+p)^n=\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$, e quindi $a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m=(a+b)^m=a^m(1+p)^n$, ed estratta la radice n.esima

$$(a+b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}(1+p)=a^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}a^{\frac{m-n}{n}}b+\frac{m(m-n)}{n.2n}a^{\frac{m-2n}{n}}b^2$$

$$+\frac{m(m-n)(m-2n)}{n.2n.3n}a^{\frac{m-3n}{n}}b^3+\text{ ec.}$$

come sopra avevamo supposto.

La medesima formula del binomio può anche adoprarsi quando l'esponente della potestà è negativo. Facciamo

$$(a+b)^{-m}=a^{-m}-ma^{-m-1}b+\frac{m(m+1)}{2}a^{-m-2}b^2$$

$$-\frac{m(m+1)(m+2)}{2.3}a^{-m-3}b^3+\text{ ec.}$$

la qual'espressione si ricava dal teorema *Newtoniano* facendovi m negativa, e siccome $(a+b)^{-m}.(a+b)^{m}=1$, se il valore di $(a+b)^{-m}$ è quale lo abbiamo supposto, il di lui prodotto con il valore di $(a+b)^{m}$ deve essere eguale all'unità. Ora siccome

$$(a+b)^{m}=a^{m}+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^{2}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}b^{3}+\text{ ec.}$$

avremo $(a+b)^{m}.(a+b)^{-m}$ così espresso

$$a^{0}-ma^{-1}b+\frac{m^{2}+m}{2}a^{-2}b^{2}-\frac{m^{3}+3m^{2}+2m}{2.3}a^{-3}b^{3}+\text{ ec.}$$
$$+ma^{-1}b-\quad m^{2}a^{-2}b^{2}+\quad\frac{m^{3}+m^{2}}{2}a^{-3}b^{3}+\text{ ec.}$$
$$+\frac{m^{2}-m}{2}a^{-2}b^{2}-\quad\frac{m^{3}-m^{2}}{2}a^{-3}b^{3}+\text{ ec.}$$
$$+\frac{m^{3}-3m^{2}+2m}{2.3}a^{-3}b^{3}+\text{ ec.}$$

ove i coefficienti del secondo termine e de' seguenti evidentemente svaniscono, e siccome rimane il solo termine $a^{0}=1$, sarà la formula che esprime il valore di $(a+b)^{-m}$ moltiplicata per $(a+b)^{m}$ eguale all'unità; lo che doveva succedere se quella formula era vera. È dunque

$$(a+b)^{-m}=a^{-m}-ma^{-m-1}b+\frac{m(m+1)}{2}a^{-m-2}b^{2}.$$
$$-\frac{m(m+1)(m+2)}{2.3}a^{-m-3}b^{3}+\text{ ec.}$$
$$=\frac{1}{a^{m}}\left(1-m\frac{b}{a}+\frac{m(m+1)}{2}\frac{b^{2}}{a^{2}}-\frac{m(m+1)(m+2)}{2.3}\frac{b^{3}}{a^{3}}+\text{ ec.}\right)$$

la qual'espressione và all'infinito, e serve per ridurre in serie la frazione $\frac{1}{(a+b)^{m}}$. Ma acciò la serie riesca convergente bisognerà prendere $a>b$: così facendo $m=1$, $a=2$, $b=1$ avremo

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\text{ ec. all'infinito.}$$

In simil guisa si dimostrerà la formula del binomio aver luogo anche nel caso dell'esponente fratto e negativo.

CAPITOLO VI.

Delle quantità imaginarie.

27.

Da quello che abbiamo detto de' radicali apparisce chiaramente, che di alcune quantità non si può esattamente esprimere il rapporto alle quantità intere e fratte; contuttociò esse si ammettono nell' Algebra, perchè il loro valore si può ottenere tanto prossimamente quanto piace. Un paradosso più grande ci presentano le quantità *imaginarie*, che s' incontrano nell' Algebrica soluzione de' problemi, le quali non esistono, ed è impossibile lo esprimerle non solo esattamente ma nè pure per approssimazione. Nientedimeno l' Analisi considera, ed insegna ad operare su queste quantità, sì perchè qualche volta dall' unione di più quantità imaginarie ne nascono quantità reali, sì perchè il valore imaginario di una quantità, dalla quale la soluzione di un problema dipende, mostra che questo problema è impossibile. Ciò meglio si comprenderà, quando parleremo della soluzione de' problemi.

Per ben conoscere la natura delle quantità imaginarie convien ricordarsi, che il quadrato di una quantità tanto positiva che negativa è sempre positivo: da ciò segue che è impossibile lo estrarre la radice quadrata da una quantità negativa. Se dunque nella soluzione di qualche problema siamo nel caso di dovere estrarre la radice quadrata da una quantità negativa $-a^2$, questa radice non esiste, e perciò $\sqrt{-a^2}$ ha il nome di quantità imaginaria o impossibile. Per più semplicità questa quantità $\sqrt{-a^2}$ si esprime in altra maniera così $a\sqrt{-1}$, poichè essendo $-a^2 = a^2 \times -1$, sarà $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2 \times -1} = a\sqrt{-1}$. Se ad una quantità imaginaria si aggiunge una reale, o se ne sottrae, o si moltiplica per essa, o l' una per l' altra si divide, il resultato si deve reputare una quantità imaginaria. Così, essendo a, b, c reali, le quantità $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$, $a+bc\sqrt{-1}$, $\frac{a-b\sqrt{-1}}{c}$ sono tutte impossibili.

Essendo positivo il cubo di una quantità positiva, negativo quello di una quantità negativa, la radice cubica di una quan-

tità negativa sarà sempre possibile, o sia reale; onde nelle radici cubiche non s'incontrano alcune quantità imaginarie. Ma la quarta potenza dovendo esser necessariamente positiva, da una quantità negativa non si può estrarre la radice quarta, e perciò $\sqrt[4]{-a^4}=a\sqrt[4]{-1}$ è imaginaria. L'istesso s'intenda di tutte le radici di esponente pari, le quali saranno imaginarie, se la quantità sotto il segno sarà negativa.

28.

La somma e la sottrazione delle quantità imaginarie si fa nella solita forma: così $a\sqrt{-1}+b\sqrt{-1}$, ed $a\sqrt{-1}-b\sqrt{-1}$ significa che la quantità $b\sqrt{-1}$ nel primo caso è aggiunta, nel secondo è tolta dalla quantità $a\sqrt{-1}$.

Se la quantità reale a si dovrà moltiplicare per l'imaginaria $b\sqrt{-1}$, il prodotto sarà $ab\sqrt{-1}$, ove per i segni vagliono le solite regole. Non così succede se devono moltiplicarsi tra loro due quantità imaginarie: poichè essendo qualunque radice quadrata moltiplicata in se stessa eguale alla quantità posta sotto il segno radicale, sarà $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$, e quindi $a\sqrt{-1}.b\sqrt{-1}=ab\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=ab\times-1=-ab$, cioè il prodotto di due quantità $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$ imaginarie positive è reale e negativo $=-ab$. Lo stesso deve dirsi del prodotto di due quantità imaginarie negative; perchè $-a\sqrt{-1}\times-b\sqrt{-1}=ab\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=ab$. Se poi le quantità imaginarie sono di diverso segno, il prodotto è positivo, poichè $a\sqrt{-1}\times-b\sqrt{-1}=-ab\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-ab\times-1=ab$. Poste queste cose è facile adesso il moltiplicare tra loro le quantità imaginarie complesse, come mostra il seguente

ESEMPIO

Si debbano moltiplicare tra loro le quantità $4a+3\sqrt{b}\sqrt{-1}+2c\sqrt{-1}$, $6a-2\sqrt{b}\sqrt{-1}+3c\sqrt{-1}$; il prodotto si troverà come segue.

$$
\begin{array}{l}
4a+3\sqrt{b}\sqrt{-1}+2c\sqrt{-1} \\
6a-2\sqrt{b}\sqrt{-1}+3c\sqrt{-1} \\
\hline
24a^2+18a\sqrt{b}\sqrt{-1}+12ac\sqrt{-1} \\
\quad -8a\sqrt{b}\sqrt{-1} \qquad\qquad\qquad +6b+4c\sqrt{b} \\
\qquad\qquad\qquad +12ac\sqrt{-1} \qquad -9c\sqrt{b}-6c^2 \\
\hline
24a^2+10a\sqrt{b}\sqrt{-1}+24ac\sqrt{-1}+6b-5c\sqrt{b}-6c^2
\end{array}
$$

Se una quantità imaginaria si dovrà dividere per una reale, il quoziente si otterrà osservando per i segni le solite regole, così $\frac{ab\sqrt{-1}}{a}=b\sqrt{-1}$, $\frac{-ab\sqrt{-1}}{a}=-b\sqrt{-1}$, $\frac{ab\sqrt{-1}}{-a}=-b\sqrt{-1}$, $\frac{-ab\sqrt{-1}}{-a}=b\sqrt{-1}$. Ma se una quantità reale ab si dovrà dividere per una imaginaria $b\sqrt{-1}$, il quoziente sarà imaginario e negativo, cioè $=-a\sqrt{-1}$; poichè
$\frac{ab}{b\sqrt{-1}}=\frac{a}{\sqrt{-1}}=\frac{-a\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\times-\sqrt{-1}}=\frac{-a\sqrt{-1}}{1}=-a\sqrt{-1}$. Così pure
$\frac{-ab}{b\sqrt{-1}}=\frac{-a}{\sqrt{-1}}=\frac{a\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\times-\sqrt{-1}}=a\sqrt{-1}$,
$\frac{-ab}{-b\sqrt{-1}}=\frac{-a}{-\sqrt{-1}}=\frac{-a\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}}=-a\sqrt{-1}$: cioè se il dividendo reale e il divisore imaginario avranno i medesimi segni, il quoziente sarà negativo; se avranno segno diverso, il quoziente sarà positivo. Se poi la quantità imaginaria $ab\sqrt{-1}$ si deve dividere per l'imaginaria $b\sqrt{-1}$, il quoziente sarà $=a$, perchè $\frac{ab\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}}=\frac{a\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=a$; e così pure $\frac{-ab\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}}=-a$,
$\frac{ab\sqrt{-1}}{-b\sqrt{-1}}=-a$, e finalmente $\frac{-ab\sqrt{-1}}{-b\sqrt{-1}}=a$, cioè in questo caso i segni si regolano al solito. Per la divisione degli imaginarj complessi diamo il seguente

Esempio

Si debba dividere la quantità
$24a^2+10ab\sqrt{-1}+24ac\sqrt{-1}+6b^2-5bc-6c^2$ per la quantità
$4a+3b\sqrt{-1}+2c\sqrt{-1}$; l'operazione si farà come segue.

$$
\begin{array}{l}
4a+3b\sqrt{-1}+2c\sqrt{-1})\,24a^2+10ab\sqrt{-1}+24ac\sqrt{-1}+6b^2-5bc-6c^2 \\
6a-2b\sqrt{-1}+3c\sqrt{-1})\,\underline{24a^2+18ab\sqrt{-1}+12ac\sqrt{-1}} \\
\qquad\qquad -8ab\sqrt{-1}+12ac\sqrt{-1}+6b^2-5bc-6c^2 \\
\qquad\qquad \underline{-8ab\sqrt{-1}\qquad\qquad +6b^2+4bc} \\
\qquad\qquad\qquad 12ac\sqrt{-1}\quad -9bc-6c^2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{12ac\sqrt{-1}\quad -9bc-6c^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Passiamo alle potenze delle quantità imaginarie, e sicco-

Digitized by Google

me $a\sqrt{-1}\times a\sqrt{-1}=-a^2$, sarà $(a\sqrt{-1})^2=-a^2$; quindi
$(a\sqrt{-1})^3=-a^2.a\sqrt{-1}=-a^3\sqrt{-1}$,
$(a\sqrt{-1})^4=-a^3\sqrt{-1}.a\sqrt{-1}=a^4$, $(a\sqrt{-1})^5=a^4.a\sqrt{-1}=a^5\sqrt{-1}$,
$(a\sqrt{-1})^6=a^5\sqrt{-1}.a\sqrt{-1}=-a^6$, $(a\sqrt{-1})^7=-a^7\sqrt{-1}$,
$(a\sqrt{-1})^8=a^8$, ec. Sono dunque reali tutte le potestà pari di $(a\sqrt{-1})$, imaginarie le dispari; e per riguardo alle potenze pari, esse sono positive se la metà del loro esponente è pari, negative se è dispari, cioè è sempre $(a\sqrt{-1})^{2m}=a^{2m}$ se m è pari, $(a\sqrt{-1})^{2m}=-a^{2m}$ se m è dispari. Le potenze dispari son positive, se tolta l' unità dal loro esponente, il residuo è parimente pari, o sia divisibile per 4; se nò, sono negative. Così
$(a\sqrt{-1})^{2m+1}=a^{2m+1}.\sqrt{-1}$ se m è pari,
$(a\sqrt{-1})^{2m+1}=-a^{2m+1}.\sqrt{-1}$ se m è dispari. Le potestà degl' imaginarj complessi si troveranno per mezzo del teorema *Newtoniano*, e sarà

$$(a+b\sqrt{-1})^n=a^n+na^{n-1}b\sqrt{-1}-\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}a^{n-3}b^3\sqrt{-1}+\text{ec.}$$

29.

Abbiamo fin quì supposte le quantità imaginarie formate dalla somma di una quantità reale, e di un'altra reale moltiplicata per $\sqrt{-1}$; e ciò abbiamo fatto, perchè è stato dimostrato dal Sig. d' *Alembert*, che qualunque quantità imaginaria si può sempre ridurre alla forma $A+B\sqrt{-1}$, ove A e B sono quantità reali. La verità di questo teorema è chiara per riguardo alla somma e alla sottrazione, ed anche alla moltiplicazione, perchè il prodotto delle due quantità $a+b\sqrt{-1}$, e $c+d\sqrt{-1}$ è $=ac+ad\sqrt{-1}+bc\sqrt{-1}-bd$, cioè della forma $A+B\sqrt{-1}$ posta $A=ac-bd$, e $B=ad+bc$. Della medesima forma è pure il quoziente nato dalla divisione delle quantità imaginarie, poichè $\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}$ moltiplicando di sopra e di sotto per $c-d\sqrt{-1}$ diventa $\frac{ac-ad\sqrt{-1}+bc\sqrt{-1}+bd}{c^2+d^2}$

$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1}$, ove perciò $A=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$, e $B=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$.
Abbiamo veduto di sopra essere

$$(a+b\sqrt{-1})^n=a^n+na^{n-1}b\sqrt{-1}-\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}a^{n-3}b^3\sqrt{-1}+\text{ ec.}$$

Onde se ponghiamo

$$A=a^n-\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}a^{n-4}b^4-\text{ ec.}$$
$$B=na^{n-1}b-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}a^{n-3}b^3+\text{ ec.}$$

ne nascerà $(a+b\sqrt{-1})^n=A+B\sqrt{-1}$. Se facciamo n fratta, avremo ridotte alla medesima forma le quantità radicali imaginarie. Rimane il caso, in cui l'esponente n è egli stesso imaginario, il quale insegneremo a ridurre, quando ci saremo un poco più inoltrati.

CAPITOLO VII.

Della risoluzione de' Problemi, e dell' equazioni del primo grado.

30.

Quello che abbiamo detto fin qui sul computo delle quantità si deve applicare alla soluzione de'problemi, nella quale consiste l'uso dell'Algebra. Poichè dalle condizioni date tra le quantità cognite ed incognite l'Algebra insegna a determinare il rapporto, che passa tra queste e quelle. E siccome qualunque problema si raggira intorno alla quantità, qualunque condizione di esso si ridurrà sempre ad un rapporto di eguaglianza tra le quantità incognite in qualsivoglia modo mescolate con le cognite, il quale si chiama *equazione*, e si divide in due *membri* dal segno $=$ di eguaglianza.

Allorchè è proposto qualche problema, convien primieramente farsi un idea chiara di ciò che si cerca, distinguer bene le cognite dalle incognite, rappresentarsi ed esprimere adequatamente tutte le condizioni del problema, e resecarne tutto ciò

che vi è d'inutile. Sopra questo nulla in generale si può insegnare; l'uso solo e l'esercizio possono renderlo facile. Quando poi tutte le condizioni del problema sono state espresse per altrettante equazioni, convien *risolvere* queste, cioè ricavarne il valore dell'incognita. Questa seconda operazione non è così incerta come la prima, poichè, data una equazione, alcune regole fisse insegnano il modo di ottenerne il valor della incognita.

Siccome la varietà infinita de' problemi conduce ad infinite equazioni di una forma diversa, hanno stabilito gli Analisti di dividerle in varie specie o *gradi*, i quali riconoscono l'origine ed il nome dall'esponente dell'incognita; in modo che quelle si dicono di primo grado, nelle quali il massimo esponente dell'incognita è $=1$, di secondo se il massimo esponente è $=2$, di terzo se è $=3$, ec. E quantunque questa distribuzione dell'equazioni sembrar possa arbitraria, si vedrà in seguito che essa dipende dalla natura dell'equazioni, e dai diversi metodi di risolverle.

31.

Allorchè si è tradotto il problema in equazione, convien risolverla, cioè ridurla ad un'altra, in un membro della quale sia la sola incognita, nell'altro le sole cognite: e qui si osservi che le quantità incognite saranno in seguito espresse per mezzo delle ultime lettere x, y, z, u, ec. dell'Alfabeto, le cognite per le prime a, b, c, ec. Le regole per risolvere l'equazioni di primo grado, delle quali adesso parleremo, sono tre, da usarsi secondochè l'incognita è diversamente involta tra le quantità cognite: ora ciò può succedere in tre modi, o mediante la somma e la sottrazione, come nell'equazione $x+3=5-x$; o per mezzo della somma della sottrazione e della moltiplicazione, come nell'equazione $4x-6=2x+16$; o finalmente anche mediante la divisione.

Sia data l'equazione $4x+3=12-2x$, e da ambedue i membri si sottragga 3, i residui $4x+3-3$, $12-2x-3$, cioè $4x$, $12-2x-3$ saranno eguali, o sia $4x=12-2x-3$, ove il termine $+3$ dell'equazione data è stato posto dal primo nel secondo membro mutandogli il segno, e lo stesso può farsi in generale. Adesso ai membri di quest'ultima equazione $4x=12-2x-3$ si aggiunga $2x$, e ne verrà $4x+2x=12-2x-3+2x$, cioè $4x+2x=12-3$, ove il termine $-2x$ mutato il segno è stato tra-

sportato dal secondo membro nel primo. Di qui nasce la prima regola: qualunque termine, cioè, può portarsi da un membro nell'altro salva l'equazione, purchè gli si cangi il segno. Per mezzo di questa regola si possono ridurre in un membro tutti i termini che contengono l'incognita, non comprendendo l'altro che quantità cognite. Per far ciò si scriverà di nuovo l'equazione ponendo nel primo membro i termini affetti dall'incognita con i loro segni se erano nel primo membro, con i segni mutati se erano nel secondo, e tenendo l'istessa regola per riguardo alle quantità cognite da collocarsi nel secondo membro. Così l'equazione $7x-8=6x+14$ diventa $7x-6x=14+8$, cioè $x=22$, e l'equazione $ax+bc-cx=ac-bx$ si riduce ad $ax-cx+bx=ac-bc$.

Allorchè tutti i termini affetti dalla incognita sono stati posti nel primo membro, fatta la riduzione si deve osservare se l'incognita è moltiplicata per l'unità, o per un altro fattore: nel primo caso l'equazione è già risoluta, come succede nella seguente $3x+4=2x+8$, la quale trasponendo i termini diventa $3x-2x=8-4$, cioè $x=4$, e ci dà il valore dell'incognita. Nell' altro caso, in cui l'incognita ha un coefficiente diverso dall'unità, convien per esso dividere il secondo membro. Così l'equazione $8x+6=30-4x$ trasponendo diventa $8x+4x=30-6$, e riducendo $12x=24$; se ora dividiamo per 12 l'uno e l'altro membro, si manterrà l'equazione, e sarà $\frac{12x}{12}=\frac{24}{12}$, o sia $x=2$. Quindi se dopo la riduzione l'incognita è moltiplicata per qualche quantità, si scriva sola nel primo membro, e si divida pel suo coefficiente il secondo membro. Così se $ax=bc$, sarà $x=\frac{bc}{a}$, e più generalmente se abbiamo l'equazione $ax+bc-cx=ac-bx$, che per la trasposizione diventa $ax+bx-cx=ac-bc$, o sia $(a+b-c)x=ac-bc$, dividendo avremo $x=\frac{ac-bc}{a+b-c}$: in modo che, se il primo membro è composto di più termini, bisogna dividere il secondo per la somma di tutti i coefficienti. E poichè il coefficiente di x è l'unità, se avremo l'equazione $x+ax=b$, sarà $x=\frac{b}{1+a}$.

Queste regole hanno anche luogo, se l'equazione è composta di frazioni; ma in questo caso torna più conto di mandar su-

bito via le frazioni. Proposta l'equazione $\frac{2x}{3}+4=\frac{4x}{5}+12-\frac{5x}{7}$, se moltiplichiamo tutti i termini per 3 denominatore della prima frazione, questa salva l'equazione anderà via, ed avremo $\frac{3.2x}{3}+12=\frac{3.4x}{5}+36-\frac{3.5x}{7}$, o sia $2x+12=\frac{12x}{5}+36-\frac{15x}{7}$. Similmente se moltiplicheremo questa equazione per 5 denominatore della prima frazione che rimane, anche questa se ne anderà, ed avremo $10x+60=12x+180-\frac{75x}{7}$. Finalmente moltiplicando per 7 denominatore della frazione rimasta avremo l'equazione $70x+420=84x+1260-75x$, che non contien più alcuna frazione. Quindi per liberare un'equazione dalle frazioni bisogna moltiplicare tutti i termini per i denominatori di ciascuna frazione.

Le frazioni si possono anche eliminar tutte per mezzo di una sola operazione. Si riprenda l'equazione $\frac{2x}{3}+4=\frac{4x}{5}+12-\frac{5x}{7}$, e le frazioni $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{7}$ si riducano al medesimo denominatore, lo che farà diventar l'equazione $\frac{70x}{105}+4=\frac{84x}{105}+12-\frac{75x}{105}$. Se anche i numeri 4 e 12 si ridurranno in frazioni del medesimo denominatore 105, si avrà $70x+420=84x+1260-75x$, come sopra. Per eliminar dunque le frazioni convien moltiplicare i termini interi pel prodotto di tutti i denominatori, ed il numeratore di ciascuna frazione per i denominatori delle altre.

Dopo queste regole tutta la difficoltà nella soluzione dei problemi di primo grado si riduce a porre il problema in equazione. Per renderci ciò familiare, ci eserciteremo ne' seguenti problemi.

Problema I.

„ Tra un padre ed il di lui figlio vi corrono quaranta an-
„ ni, e gli anni di ambedue presi insieme sono cento; qual' è
„ l' età di ciascuno? „

Sia l'età del padre $=x$, e siccome il figlio è 40. anni più giovane del padre, per aver l'età del figlio converrà sottrarre 40. anni da quella del padre, e sarà perciò l'età del figlio $=x-40$. Ma per la condizione del problema le due età prese insieme so-

no $=100$; avremo dunque $x+x-40=100$ cioè $2x-40=100$, che è l'equazione del problema. Da essa per mezzo della trasposizione abbiamo $2x=100+40=140$, e finalmente $x=\frac{140}{2}=70$. Conosciuto il valore di x, cioè l'età del padre, avremo quella del figlio $=x-40=70-40=30$.

Generalmente se di due quantità x ed y è data la somma a e la differenza b, sarà $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$, cioè la quantità maggiore sarà eguale alla mezza differenza aggiunta alla mezza somma, e la minore eguaglierà la mezza differenza sottratta dalla mezza somma.

Problema II.

„ Un padre ha lasciati morendo 10000 zecohini da dividersi tra i suoi tre figli in modo, che il maggiore abbia 2000 zecchini più del secondo, ed il secondo 3000 più del terzo: si cerca la porzione di ciascuno. „

Sia x la porzione del primo, quella del secondo sarà $x-2000$, e la porzione del terzo $x-2000-3000$; ora queste tre parti dovendo formare l'intiera eredità di 10000 zecchini avremo $x+x-2000+x-5000=10000$, cioè $3x-7000=10000$, e trasponendo $3x=10000+7000=17000$, e dividendo per 3, $x=\frac{17000}{3}=5666+\frac{2}{3}$, che è la porzione del primo, la parte del secondo sarà $5666+\frac{2}{3}-2000=3666+\frac{2}{3}$, e quella del terzo $3666+\frac{2}{3}-3000=666+\frac{2}{3}$.

Più generalmente sia proposto di dividere un numero qualunque b in tre parti in modo, che la prima superi la seconda della quantità a, e la seconda sia maggior della terza della quantità a'. Posta la prima parte $=x$, sarà la seconda $=x-a$, e la terza $=x-a-a'$; onde avremo l'equazione $3x-2a-a'=b$, $x=\frac{b+2a+a'}{3}$.

Si debba adesso dividere la quantità b in quattro parti in modo, che la differenza tra la prima e la seconda sia a, tra la seconda e la terza a', tra la terza e la quarta a''. Posta la prima parte $=x$, il calcolo si farà come segue:

$$\begin{array}{l} x \\ x-a \\ x-a-a' \\ x-a-a'-a'' \\ \hline 4x-3a-2a'-a''=b \end{array}$$

dalla qual'equazione si ricava $x=\frac{b+3a+2a'+a''}{4}$.

Nell'istessa guisa se la quantità b si dovrà dividere in 5 parti, e le differenze incominciando dalla prima siano per ordine a, a', a'', a''', fatto il calcolo si troverà esser la prima parte, cioè $x=\frac{b+4a+3a'+2a''+a'''}{5}$. E similmente se le parti saranno sei, e la quinta differenza $=a^{IV}$, si troverà $x=\frac{b+5a+4a'+3a''+2a'''+a^{IV}}{6}$. Ma se le parti fossero due sole, abbiamo di sopra trovato $x=\frac{b+a}{2}$. Riunendo insieme i valori trovati di x formiamo la Tavola seguente:

Numero delle parti	La massima delle parti $=x$
2	$x=\frac{b+a}{2}$
3	$x=\frac{b+2a+a'}{3}$
4	$x=\frac{b+3a+2a'+a''}{4}$
5	$x=\frac{b+4a+3a'+2a''+a'''}{5}$
6	$x=\frac{b+5a+4a'+3a''+2a'''+a^{IV}}{6}$
ec.	ec.

Apparisce da questa Tavola che il denominatore di ciascun valore di x è eguale al numero delle parti; nel numeratore poi il coefficiente del secondo termine è sempre minore dell'unità che il denominatore, e gli altri vanno sempre decrescendo dell'unità fino all'ultimo, che è $=1$. Onde se il numero delle parti sarà m, avremo la formula generale così espressa:

$$x=\frac{b+(m-1)a+(m-2)a'+(m-3)a''+(m-4)a'''+\text{ ec.}}{m}$$

Problema III.

„ Se da una quantità si sottrae la di lei metà e uno di più, „ da quel che rimane la metà ed uno di più, da questo secon- „ do residuo la metà di nuovo ed uno di più, e si trova che „ quel che rimane è $=1$, trovare la prima quantità. „

Sia quella quantità $=x$, e la di lei metà accresciuta dell'unità sarà $=\frac{x}{2}+1=\frac{x+2}{2}$, la quale se si sottrae da x ci darà per residuo $\frac{x-2}{2}$. La metà di questo residuo accresciuta dell'unità è $=\frac{x-2}{4}+1=\frac{x+2}{4}$, la quale sottratta dal medesimo residuo ci darà $\frac{x-6}{4}$. Questa quantità divisa per 2 ed aumentata dell'unità diventa $\frac{x-6}{8}+1=\frac{x+2}{8}$, e sottratta dal secondo residuo $\frac{x-6}{4}$ ci darà $\frac{x-6}{4}-\frac{x+2}{8}=\frac{x-14}{8}$, il quale ultimo residuo per la condizione del problema è $=1$. Sarà dunque $\frac{x-14}{8}=1$, cioè $x-14=8$, e quindi $x=8+14=22$.

Risolviamo adesso il medesimo problema più generalmente, adoprando le lettere invece dei numeri. Le quantità cioè che in ciascuna sottrazione si aggiungono alla metà del residuo si chiamino respettivamente a, a', a'', a''', ec. e l'ultimo residuo dato si dica b. Posta la quantità cercata $=x$, sarà la di lei metà accresciuta di $a=\frac{x}{2}+a=\frac{x+2a}{2}$, la quale sottratta da x ci dà $x-\frac{x+2a}{2}=\frac{x-2a}{2}$. Se questo residuo è dato sarà $\frac{x-2a}{2}=b$, ed $x=2b+2a$.

Ma se l'operazione si dovrà continuare, si prenda del residuo trovato $\frac{x-2a}{2}$ la metà $\frac{x-2a}{4}$, e questa insieme con a' sottratta da $\frac{x-2a}{2}$ ci darà $\frac{x-2a}{2}-\frac{x-2a}{4}-a'=\frac{x-2a-4a'}{4}$; il qual residuo posto $=b$, avremo $x-2a-4a'=4b$, cioè $x=4b+2a+4a'$.

Nell' istesso modo la metà dell' ultimo residuo $\frac{x-2a-4a'}{4}$ insieme con a'' sottratta dal medesimo residuo ci dà $\frac{x-2a-4a'}{4}-\frac{x-2a-4a'}{8}-a''=\frac{x-2a-4a'-8a''}{8}$, e posta questa quantità $=b$, abbiamo $x=8b+2a+4a'+8a''$. Continuando le sottrazioni avremo altri valori di x, i quali saranno come segue.

Numero delle sottrazioni	Valori della quantità x
1	$x=2b+2a$
2	$x=2^2b+2a+2^2a'$
3	$x=2^3b+2a+2^2a'+2^3a''$
4	$x=2^4b+2a+2^2a'+2^3a''+2^4a'''$
ec.	ec.

Onde se il numero delle sottrazioni sarà m, avremo

$$x=2^m b+2a+2^2a'+2^3a''+2^4a'''+2^5a^{IV}\ldots+2^m a^{(M-1)}.$$

Si debba per esempio trovare una quantità, dalla quale sottratta la metà e due di più, poi dal residuo la di lui metà diminuita di tre, e finalmente da questo secondo residuo la di lui metà accresciuta di quattro, rimane 10. Avremo $m=3$, $b=10$, $a=2$, $a''=4$, $a'=-3$, ove questa quantità si prende negativa, perchè nella seconda sottrazione la metà del residuo non è accresciuto come nelle altre, ma diminuito di tre; e la cercata quantità sarà $x=80+4-12+32=104$.

Problema IV.

„ Più generalmente se da una quantità si sottrae la di lei „ parte n.esima e di più la quantità a, dal residuo la parte „ n.esima e di più a', e così in seguito si prosegue l' operazione „ nella medesima forma, e dopo varie sottrazioni è dato il resi- „ duo $=b$, trovare quella quantità. „

Sia x la quantità cercata, e la di lei parte n.esima $\frac{x}{n}$ insieme con la quantità data a sottratta da x ci dà il residuo $x-\frac{x}{n}-a=\frac{(n-1)x-na}{n}$, il quale se si pone $=b$, si ottiene $(n-1)x-na=nb$, cioè $x=\frac{nb+na}{n-1}$.

La parte n.esima del residuo $\frac{(n-1)x-na}{n}$ sottratta insieme con a' dal medesimo residuo ci dà il secondo residuo
$\frac{(n-1)x-na}{n}-\frac{(n-1)x-na}{n^2}-a'=\frac{(n-1)^2x-n(n-1)a-n^2a'}{n^2}$, e posto questo $=b$, abbiamo $(n-1)^2x-n(n-1)a-n^2a'=n^2b$, cioè
$x=\frac{n^2b+n(n-1)a+n^2a'}{(n-1)^2}$.

Se continuiamo l'operazione, troveremo i residui

$$\frac{(n-1)^3x-n(n-1)^2a-n^2(n-1)a'-n^3a''}{n^3}.$$

$$\frac{(n-1)^4x-n(n-1)^3a-n^2(n-1)^2a'-n^3(n-1)a''-n^4a'''}{n^4}$$

ec.

dai quali ricaviamo i valori di x cioè

$$x=\frac{n^3b+n(n-1)^2a+n^2(n-1)a'+n^3a''}{(n-1)^3}$$

$$x=\frac{n^4b+n(n-1)^3a+n^2(n-1)^2a'+n^3(n-1)a''+n^4a'''}{(n-1)^4}$$

ec.

Acciò meglio si comprenda la legge che osservano questi valori, si dispongano per ordine come segue:

Numero delle sottrazioni	Valori di x
1	$x=\frac{nb+na}{n-1}$
2	$x=\frac{n^2b+n(n-1)a+n^2a'}{(n-1)^2}$
3	$x=\frac{n^3b+n(n-1)^2a+n^2(n-1)a'+n^3a''}{(n-1)^3}$
4	$x=\frac{n^4b+n(n-1)^3a+n^2(n-1)^2a'+n^3(n-1)a''+n^4a'''}{(n-1)^4}$
ec.	ec.

Di qui apparisce che, se il numero delle sottrazioni è $=m$, sarà

$$x=\frac{n^mb+n(n-1)^{m-1}a+n^2(n-1)^{m-2}a'+n^3(n-1)^{m-3}a''+\text{ec.}}{(n-1)^m}$$

Se $n=2$, avremo il caso contemplato nel problema precedente, e sarà $x=2^m b+2a+2^2 a'+2^3 a''+$ ec.
come sopra.

Se $n=3$, cioè se dovranno sempre sottrarsi le terze parti, avremo

$$x=\frac{3^m b+3.2^{m-1}a+3^2.2^{m-2}a'+3^3.2^{m-3}a''+\text{ ec.}}{2^m}$$

e così in seguito.

32.

Nei problemi, che abbiamo risoluti, da una sola equazione determinar si doveva il valor della incognita. Ma alcune volte conviene ammettere più incognite, ed il loro valore ricercar si deve per mezzo di altrettante equazioni. Un esempio ce ne somministrerà il seguente

Problema V.

„ Trovar due numeri x ed y tali, che il primo accresciuto „ della quantità a stia al secondo diminuito di b nel rapporto di „ e ad f, ed il secondo accresciuto della quantità c stia al pri„ mo diminuito di d come g ad h. „

Per le condizioni del problema abbiamo $x+a:y-b=e:f$, ed $y+c:x-d=g:h$. Da queste proporzioni ricaviamo le due equazioni $ey-fx=af+be$, $gx-hy=ch+dg$, dalle quali dobbiamo dedurre i valori di x ed y. Si prendano dall'una e dall'altra i valori di x ed y, e saranno questi, $y=\frac{af+be+fx}{e}$, $y=\frac{gx-ch-dg}{h}$. E siccome i due valori trovati della quantità y devono essere eguali, avremo $\frac{af+be+fx}{e}=\frac{gx-ch-dg}{h}$, cioè

$afh+beh+ceh+deg=egx-fhx$, e quindi $x=\frac{afh+beh+ceh+deg}{eg-fh}$. Sostituendo adesso questo valore di x nella equazione $y=\frac{af+be+fx}{e}$, avremo

$ey=af+be+f.\frac{afh+beh+ceh+deg}{eg-fh}=\frac{aefg+be^2g+cefh+defg}{eg-fh}$, e perciò $y=\frac{afg+beg+cfh+dfg}{eg-fh}$.

L'istesso metodo in generale si può adoprare, qualunque siano le due equazioni, poichè esse si ridurranno sempre alla forma $Ax+By=C$, $A'x+B'y=C'$, ove A, B, C, A', B', C' esprimono qualunque quantità cognita. Da esse si ricava $y=\frac{C-Ax}{B}$, $y=\frac{C'-A'x}{B'}$, e perciò $B'C-AB'x=BC'-A'Bx$, ed $x=\frac{B'C-BC'}{AB'-A'B}$. Invece di prendere i due valori di y basta moltiplicare la prima equazione per B', e sottrarre la seconda moltiplicata per B, e si otterrà subito l'equazione senza y, $AB'x-A'Bx=B'C-BC'$. Allorchè si giunge ad una equazione ove più non è la y, si dice che la y è stata *eliminata*. Se adesso eliminiamo la x moltiplicando la prima dell'equazioni proposte per A', e sottraendone la seconda moltiplicata per A avremo l'equazione $A'By-AB'y=A'C-AC'$, dalla quale si ricava $y=\frac{A'C-AC'}{A'B-AB'}$.

Nella medesima guisa si deve operare, quando son date più equazioni e più incognite. Date le tre equazioni $Ax+By+Cz=D$, $A'x+B'y+C'z=D'$, $A''x+B''y+C''z=D''$, sarà $z=\frac{D-Ax-By}{C}$, $z=\frac{D'-A'x-B'y}{C'}$, $z=\frac{D''-A''x-B''y}{C''}$; de' quali valori di z se due qualunque si paragoneranno tra loro, ne nasceranno due equazioni tra due incognite, che si tratteranno come sopra. L'istesso deve intendersi di qualunque numero di equazioni, le quali si ridurranno continuamente ad un numero inferiore di una unità, mediante l'eliminazione di una delle incognite.

Questo metodo generale può alcune volte ricevere qualche semplicizzazione, ma questa dipende sempre dalla forma dell'equazioni medesime. Per darne un esempio in un caso assai generale siano proposte tra n incognite x, y, z, u, ec. n equazioni della forma

$$A\ x+B\ (y+z+u+ \text{ec.})=C$$
$$A'\ y+B'\ (x+z+u+ \text{ec.})=C'$$
$$A''\ z+B''\ (x+y+u+ \text{ec.})=C''$$
$$A'''u+B'''(x+y+z+ \text{ec})=C'''$$
ec.

Dalla forma di quest'equazioni apparisce, che, posta la

somma di tutte le incognite $x+y+z+u+$ ec. $=r$, ciascuna di esse non conterrà che due sole incognite; poichè diventeranno

$$A\ x+B\ (r-x)=C$$
$$A'\ y+B'\ (r-y)=C'$$
$$A''z+B''(r-z)=C''$$
ec.

Da queste si può ottenere il valore di ciascuna delle incognite x, y, z, ec. espresso per r, e sarà $x=\frac{C-Br}{A-B}$, $y=\frac{C'-B'r}{A'-B'}$, $z=\frac{C''-B''r}{A''-B''}$, ec. in modo che sarà noto il valore di tutte le incognite, subito che si conoscerà quello di r. Ad ottenere il valore di r si sostituiscano i valori trovati di x, y, z, ec. in una dell'equazioni proposte, per esempio nella prima, e si otterrà l'equazione

$$\frac{A(C-Br)}{A-B}+B\left(\frac{C'-B'r}{A'-B'}+\frac{C''-B''r}{A''-B''}+\text{ ec.}\right)=C$$

la quale ci darà il valore di r; e trovato questo se ne dedurranno i valori di tutte le incognite x, y, z, ec.

CAPITOLO VIII.

Dell' equazioni del secondo grado, e delle altre che ammettono una simile risoluzione.

33.

Esposto tutto ciò che appartiene all'equazioni del primo grado, passiamo a considerar quelle del secondo. Il grado di una equazione è eguale al massimo esponente della incognita; e perciò l'equazioni del secondo grado contengono l'incognita inalzata al quadrato. Tre diverse specie di termini si trovano dunque nell'equazioni del secondo grado; primieramente vi sono i termini affatto cogniti, poi i termini affetti dalla sola incognita, e finalmente quei che involvono il quadrato dell'incognita. Onde se A, B, C esprimono quantità cognite o positive, o negative, qualunque equazione del secondo grado sarà così espressa, $Ax^2-Bx-C=0$, ove tutti i termini si pongono nel primo membro, perchè questa forma è più comoda. Se manca il se-

condo termine, cioè se $B=0$, l'equazione prende la forma $Ax^2-C=0$, e si chiama equazione *pura*.

Per incominciar da questa, poichè $Ax^2-C=0$, dividendo per A e trasponendo avremo $x^2=\frac{C}{A}$, ed estraendo la radice $x=\sqrt{\frac{C}{A}}$. Ora siccome la radice quadrata di qualunque quantità può esser tanto positiva che negativa, la radice della quantità $\frac{C}{A}$ sarà tanto $+\sqrt{\frac{C}{A}}$ quanto $-\sqrt{\frac{C}{A}}$, onde adoprando il doppio segno $\pm$ sarà $x=\pm\sqrt{\frac{C}{A}}$, cioè due saranno i valori di x, uno positivo e l'altro negativo, i quali valori egualmente soddisfanno all'equazione proposta, e si chiamano le di lei *radici*. Si osservi che posta A sempre positiva (perchè se fosse negativa mutando i segni dell'equazione diventerebbe positiva), se anche C sarà positiva, la quantità $\sqrt{\frac{C}{A}}$ sarà reale, e reali saranno i due valori di x. Ma se C sarà negativa, allora $\sqrt{\frac{C}{A}}$, sarà imaginaria, e come in tal caso l'incognita non ha alcun valore reale, il problema, che ci ha condotti ad una tal'equazione, sarà impossibile a risolversi. Sia proposto per esempio di trovare un numero, la di cui metà moltiplicata nella terza parte sia eguale a 24. Sia x il numero cercato, e la di lui metà $\frac{x}{2}$ moltiplicata nella terza parte $\frac{x}{3}$ essendo $=\frac{x^2}{6}$, avremo $\frac{x^2}{6}=24$, ed $x^2=144$, e quindi $x=\pm\sqrt{144}=\pm 12$. I due valori $+12$, e -12 soddisfanno egualmente; perchè se $x=12$, è $\frac{x}{2}=6$, $\frac{x}{3}=4$, e $6\times4=24$: se $x=-12$, è $\frac{x}{2}=-6$, $\frac{x}{3}=-4$, e $-6\times-4=24$.

Dall'equazioni pure passiamo alla risoluzione dell'equazioni di secondo grado *complete*, cioè di quelle che son comprese nella forma più generale $Ax^2-Bx-C=0$. Per ridurle all'altra forma più semplice ponghiamo $x=y+c$, ove y è una nuova incognita, e c una quantità da determinarsi a piacere, e sarà $x^2=y^2+2cy+c^2$. Sostituiti nella proposta questi valori di x ed x^2 essa diventerà $Ay^2+(2Ac-B)y+Ac^2-Bc-C=0$, e se ne

manderà via il secondo termine, se si prenderà la quantità arbitraria c in modo, che sia $2Ac-B=0$, o sia $c=\frac{B}{2A}$. Posto questo valore di c l'equazione precedente diventerà
$Ay^2-\frac{B^2}{4A}-C=0$, ed $y^2=\frac{B^2+4AC}{4A^2}$, ed estraendo la radice,
$y=\frac{\pm\sqrt{(B^2+4AC)}}{2A}$, ed $x=y+\frac{B}{2A}=\frac{B\pm\sqrt{(B^2+4AC)}}{2A}$, la qual espressione presenta ambedue le radici della proposta.

Se nell'equazione $Ax^2-Bx-C=0$ il coefficiente A rimane sempre positivo, ma si cangiano in qualunque modo i segni degli altri coefficienti, ne nasceranno queste quattro forme:

$$\text{I. } Ax^2-Bx-C=0, \qquad \text{II. } Ax^2+Bx-C=0,$$
$$\text{III. } Ax^2+Bx+C=0, \qquad \text{IV. } Ax^2-Bx+C=0,$$

alle quali corrispondono le seguenti radici;

$$\text{I. } x=\frac{B\pm\sqrt{(B^2+4AC)}}{2A}, \quad \text{II. } x=\frac{-B\pm\sqrt{(B^2+4AC)}}{2A},$$
$$\text{III. } x=\frac{-B\pm\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}, \text{IV. } x=\frac{B\pm\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}.$$

È facile il vedere, che la prima e la seconda di queste formule sono sempre reali, perchè $\sqrt{(B^2+4AC)}$ non diventa mai imaginaria; ma la terza e la quarta possono essere e reali ed imaginarie; saranno cioè reali, se sarà $B^2>4AC$, imaginarie se $B^2<4AC$: onde dalla forma medesima dell'equazione si potrà subito giudicare, se le di lei radici sono reali o imaginarie. Venghiamo ad alcuni esempj.

PROBLEMA I.

„ Un giuocatore, di 160 zecchini, che aveva prima di giuo-
„ care, ne ha perduti alcuni, poi avendone guadagnati 6298
„ non solo si è rifatto di quei che aveva perduto, ma di più gli
„ ha tante volte moltiplicati, quanti erano gli zecchini rimasti-
„ gli dopo la prima perdita: si cerca il numero degli zecchini
„ da principio perduti „.

Sia x questo numero, e per le condizioni del problema dovrà essere il guadagno 6298 eguale ad x, più ad x moltiplicato in $160-x$; onde nasce l'equazione $6298=x+160x-x^2$, o sia $x^2-161x+6298=0$. Se paragoniamo questa equazione con la quarta delle formule precedenti, troveremo

$x=\frac{161\pm\sqrt{729}}{2}=\frac{161\pm27}{2}$. Quindi due sono i valori di x, cioè $x=\frac{161+27}{2}=94$, ed $x=\frac{161-27}{2}=67$, i quali soddisfanno egualmente al problema proposto..

PROBLEMA II.

,, Trovare un numero, il di cui quadrato sia eguale al me-
,, desimo numero prima diminuito di tre unità, poi preso tre
,, volte ,,.

Sia il numero cercato $=x$, ed il di lui quadrato x^2 dovendo eguagliare il triplo di $x-3$, sarà $x^2=3x-9$, cioè $x^2-3x+9=0$. Paragonando questa equazione con la formula quarta troveremo $x=\frac{3\pm\sqrt{(9-36)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-27}}{2}$. Essendo i valori di x imaginarj, questo problema non può risolversi, e ne nasce il teorema, che *non esiste alcun numero, il di cui quadrato eguagli il triplo della differenza tra questo numero ed il numero* 3.

34.

Il metodo, di cui ci siamo serviti per risolvere l'equazioni del secondo grado, si estende ad altre de'gradi superiori, le quali perciò si chiamano *derivative* del secondo grado. Sia data in primo luogo l'equazione $Ax^4+Bx^2+C=0$, e posto $x^2=y$, essa diventerà $Ay^2+By+C=0$, onde si ricava $y=\frac{-B\pm\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}$. Ma siccome abbiamo supposto $y=x^2$, sarà $x=\pm\sqrt{y}$, cioè $x=\frac{\pm\sqrt{[-B\pm\sqrt{(B^2-4AC)}]}}{\sqrt{2A}}$ la qual forma presi in tutti i diversi modi possibili i segni $+$ e $-$ ci dà quattro radici, cioè $x=\sqrt{\frac{-B+\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}}$,
$x=-\sqrt{\frac{-B+\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}}$, $x=\sqrt{\frac{-B-\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}}$,
$x=-\sqrt{\frac{-B-\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}}$. Prendiamo per esempio l'equazione $x^4-5x^2+4=0$, alla quale si giunge, allorchè si cercano

due quadrati, de' quali è data la somma $=5$, ed il prodotto $=4$. Sarà $x=\pm\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{(25-16)}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{5\pm3}{2}}$, cioè $x=\pm\sqrt{4}=\pm2$, ed $x=\pm\sqrt{1}=\pm1$. Le quattro radici della proposta sono adunque $x=2$, $x=-2$, $x=1$, $x=-1$, le quali tutte soddisfanno al problema, e ci fanno conoscere essere i quadrati richiesti 1, e 4.

Nella precedente soluzione siamo giunti ad espressioni involte in doppio segno radicale della forma $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$. Alcune volte succede che dal radicale $a+\sqrt{b}$ si possa di fatto estrarre la radice quadrata, lo che, siccome rende l'espressioni più semplici, vediamo come si possa eseguire. E primieramente si osservi che il quadrato del binomio $\sqrt{y}+\sqrt{x}$ è una quantità, di cui un termine è razionale, e l'altro irrazionale del medesimo nome; infatti $(\sqrt{y}+\sqrt{x})^2=y+x+2\sqrt{yx}$: onde reciprocamente $\sqrt{y}+\sqrt{x}$ sarà la radice quadrata della quantità $y+x+2\sqrt{yx}$. Ora proposta qualunque quantità $a+\sqrt{b}$, dalla quale si debba estrarre la radice quadrata facciamo questa quantità $=y+x+2\sqrt{yx}$, o sia paragonando tra loro separatamente i termini razionali ed i radicali $y+x=a$, e $2\sqrt{yx}=\sqrt{b}$, cioè $4yx=b$. La prima equazione ci dà $y^2+2yx+x^2=a^2$, e da questa sottraendo la seconda abbiamo $y^2-2yx+x^2=a^2-b$, ed estraendo la radice quadrata $y-x=\sqrt{(a^2-b)}$. Da questa equazione e dalla precedente $y+x=a$ si ricava $y=\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}$, $x=\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}$; onde la radice quadrata della quantità $a+\sqrt{b}$ cioè $\sqrt{y}+\sqrt{x}$ sarà $\sqrt{\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}}$. Questa espressione in generale più complicata della formula $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$ ne diviene più semplice, quando a^2-b è un quadrato. Poichè posto $a^2-b=c^2$, sarà $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$: negli altri casi torna più conto di porre la quantità $a+\sqrt{b}$ sotto il segno radicale.

Si debba per esempio estrarre la radice quadrata dal binomio $2+\sqrt{3}$. Sarà $a=2$, $b=3$, $a^2-b=c^2=1$, e $c=1$, e perciò $\sqrt{(2+\sqrt{3})}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Si abbia il binomio $5+2\sqrt{6}$, sarà $a=5$, $\sqrt{b}=2\sqrt{6}$, cioè $b=24$, e $c=\sqrt{(a^2-b)}=\sqrt{(25-24)}=1$; onde $\sqrt{(5+2\sqrt{6})} =\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Sia proposto il binomio imaginario $1+4\sqrt{-3}$, dal quale estrar si voglia la radice quadrata. Sarà $a=1$, $\sqrt{b}=4\sqrt{-3}$, cioè $b=-48$, $c=\sqrt{(1+48)}=7$, e perciò $\sqrt{(1+4\sqrt{-3})}=2+\sqrt{-3}$.

Finalmente si estragga la radice quadrata dal monomio qualunque imaginario $m\sqrt{-1}$. Sarà $a=0$, $b=-m^2$, $c=m$, e la radice cercata $=\sqrt{\frac{m}{2}}+\sqrt{-\frac{m}{2}}=\sqrt{\frac{m}{2}}\times(1+\sqrt{-1})$.

L'istesso metodo, col quale abbiamo ridotta al secondo grado la precedente equazione del quarto, ci servirà per trattare molte altre equazioni dei gradi superiori. Sia data infatti l'equazione $Ax^{2n}-Bx^n-C=0$, e posto $x^n=y$, o sia $x=\sqrt[n]{y}$ sarà $Ay^2-By-C=0$; onde si deduce $y=\frac{B\pm\sqrt{(B^2+4AC)}}{2A}$, e perciò $x=\sqrt[n]{\frac{B\pm\sqrt{(B^2+4AC)}}{2A}}$. Questa formula, a motivo della ambiguità de'segni, ci dà quattro radici nel caso di n pari, e due in quello di n dispari: vedremo quali siano le altre radici in seguito, quando dimostreremo che una equazione ha tante radici, quante unità contiene il di lei grado.

CAPITOLO IX.

Della natura e delle proprietà dell'equazioni.

35.

Equazione si dice qualunque eguaglianza tra le quantità cognite ed incognite in qualsivoglia modo mescolate tra loro, e si divide in due *membri* per mezzo del segno di eguaglianza $=$. Si dice *radice* di una equazione quella quantità, che sostituita in luogo dell'incognita *soddisfà* alla medesima equazione, cioè rende un membro eguale all'altro: così 1 è una radice dell'equazione $x^4+2x^2=10x-7$, perchè sostituita l'unità invece di x questa equazione diventa $1+2=10-7$, cioè $3=3$, e quindi il primo membro si eguaglia al secondo. La radice di una equa-

zione si dice *positiva* o *negativa*, secondo che il di lei valore è positivo o negativo, *irrazionale* o *razionale* se il di lei valore è involto o nò tra' radicali, *reale* o *imaginaria*, se il di lei valore è reale o imaginario.

Un' equazione si dice *ordinata*, quando posti tutti i termini nel primo membro, nell' altro si scrive il zero. In seguito supporremo sempre l' equazioni ordinate; cioè se m rappresenta il grado di una equazione, la porremo sempre sotto la forma (E)

$$(E) \quad x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots\ldots \pm N = 0$$

ove $A, B, C, \ldots. N$ rappresentano qualunque quantità cognita reale o positiva o negativa.

Quella equazione dicesi completa, nella quale si trovano tutte le potenze dell' incognita dalla massima fino alla minima, cioè fino al termine cognito. Se l' equazione è *incompleta*, invece de' termini che mancano si scrive alcune volte il segno $*$. Così nell' equazione $x^5 + bx^3 + cx + a = 0$ mancando il secondo e il quarto termine, questa mancanza si accenna così; $x^5 * + bx^3 * cx + a = 0$.

Siccome le radici di una equazione sostituite in luogo dell' incognita x rendono l' equazione $=0$; viceversa se una quantità a sostituita in luogo dell' incognita in una data equazione (E) la rende $=0$, questa quantità a sarà una delle radici dell' equazione (E): inoltre il primo membro della medesima equazione si potrà dividere per $x-a$. Per dimostrar ciò facciamo la divisione dell' equazione (E) per $x-a$, e supponghiamo che il quoziente sia

$$x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + C'x^{m-4} \ldots. + L'x + M'$$

ed il residuo R. Avremo facendo la moltiplicazione per $x-a$, la quantità

$$\begin{array}{l} x^m + A'x^{m-1} + B'x^{m-2} + C'x^{m-3} \ldots. + L'x^2 + M'x + R \\ \quad - ax^{m-1} - A'ax^{m-2} - B'ax^{m-3} \ldots\ldots\ldots - L'ax - M'a \end{array}$$

che dovrà essere *identica* col primo membro, cioè l' istesso primo membro della proposta (E): onde dal paragone dei termini avremo

$$A' = a - A$$
$$B' = A'a + B$$
$$C' = B'a - C$$

.
.
.
.

$$R = M'a \pm N$$

cioè

$$A' = a - A$$
$$B' = a^2 - Aa + B$$
$$C' = a^3 - Aa^2 + Ba - C$$

.
.
.
.

$$R = a^m - Aa^{m-1} + Ba^{m-2} \dots \pm N.$$

Ora siccome a è una radice dell'equazione (E), sarà $R = 0$, cioè il residuo nullo, e quindi la divisione per $x - a$ si fà esattamente. In due maniere adunque si potrà vedere se una quantità a è radice di una data equazione, o sostituendola in luogo di x, o dividendo l'equazione per $x - a$; poichè se la divisione succederà esattamente, potremo èsser certi che a è una radice della proposta. Tante radici ha perciò un'equazione, quanti fattori di primo grado; e siccome il numero di questi fattori è eguale al grado dell'equazione, ne segue che tante sono le radici di una equazione, quante unità contiene il di lei grado. Quindi ancora una equazione si può rappresentare per mezzo del prodotto de'suoi fattori, cioè se le radici saranno a, b, c, d, ec.; l'equazione potrà mettersi sotto la forma $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ec.$= 0$. Di qui apparisce che, se le radici sono tutte reali e negative, cioè $-a$, $-b$, $-c$, $-d$, ec.; i termini dell'equazione $(x+a)(x+b)$ $(x+c)$ ec. $= 0$ sono tutti positivi; se poi tutte le radici sono reali e positive, i termini dell'equazione $(x-a)(x-b)(x-c)$ ec. sono alternativamente positivi e negativi. E se una equazione ha tutti i suoi termini positivi, non potrà avere alcuna radice reale positiva, perchè sostituita questa in luogo dell'incognita, il primo membro dell'equazione sarà composto di termini tutti posi-

tivi, e perciò non potrà annichilarsi. Se poi i termini di una equazione sono alternativamente positivi e negativi, non potrà essa avere alcuna radice reale negativa; perchè sostituita questa in luogo dell'incognita i termini del primo membro saranno o tutti positivi, o tutti negativi, nè perciò il primo membro potrà andare a zero.

36.

Sia data una una equazione qualunque

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots \pm Rx^{m-r} \ldots \pm T = 0,$$

in cui il coefficiente del primo termine sia l'unità, ed i segni dei termini siano alternativamente positivi e negativi, in modo che nel termine $\pm Rx^{m-r}$ abbia luogo il segno superiore se r è pari, e l'inferiore se r è dispari, e così pure nel termine $\pm T$ valga il segno $+$ se il grado m è pari, e il segno $-$ se m è dispari. Sarà sempre A eguale alla somma di tutte le radici, $B=$ alla somma dei prodotti delle radici prese a due a due, $C=$ alla somma dei prodotti delle radici prese a tre a tre, e così in seguito fino all'ultimo termine T, che sarà eguale al prodotto di tutte le radici.

Per dimostrar questo teorema, siano $a, b, c, d, e \ldots t$ le m radici della equazione data, ed essa equivarrà alla seguente

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e) \ldots (x-t) = 0,$$

e fatta perciò la moltiplicazione di tutti questi fattori ne dovrà risultare il primo membro della proposta. Ora se si concepisce eseguita una tal moltiplicazione, è facile il vedere che ciascun termine del prodotto conterrà come moltiplicatore o il primo o il secondo termine di ogni fattore, e quindi tutti i termini del prodotto si otterranno, se moltiplicheremo in tutti i modi possibili i primi termini in alcuni fattori, ed i secondi in tutti gli altri. In particolare il termine x^m nascerà, quando nella moltiplicazione si prenderà in ciascun fattore il primo termine. L'ultimo termine $\pm T$ si otterrà, quando in tutti i fattori si prende il secondo termine; onde sarà T eguale al prodotto di tutte le radici. Il termine $-Ax^{m-1}$ nascerà dalla somma di tutti quei che si formano, se in $m-1$ fattori si prende per moltiplicatore il primo termine, e nel fattore che rimane il secondo; ma que-

sto fattore che rimane o sarà il primo, o il secondo, o il terzo, ec., o l'ultimo, ed avremo perciò o $-ax^{m-1}$, o $-bx^{m-1}$, o $-cx^{m-1}$, ec. o finalmente $-tx^{m-1}$; dunque $-Ax^{m-1}$ sarà $=-(a+b+c\ldots+t)x^{m-1}$, cioè A eguale alla somma di tutte le radici. Il termine Bx^{m-2} sarà eguale alla somma di tutti quei, che nascono dal moltiplicarsi in $m-2$ fattori i primi termini, e negli altri due i secondi, i quali due si dovranno variare in tutti i modi possibili, e ci daranno il prodotto di due qualunque delle radici; dunque B sarà eguale alla somma dei prodotti a due a due di tutte le radici. Generalmente il termine $\pm Rx^{m-r}$ sarà eguale alla somma di tutti quei, che si formano, allorchè nella moltiplicazione si prende in $m-r$ fattori il primo termine, e negli r rimanenti il secondo. Questi r fattori variati in tutti i modi possibili ci daranno i prodotti formati da r qualunque delle radici, e questi prodotti avranno il segno $+$ o $-$ secondo che r sarà pari o dispari, quale appunto è il significato del doppio segno di R; onde sarà R eguale alla somma di tutti questi prodotti di r radici.

Si osservi però, che noi abbiamo supposti A, e C, e gli altri coefficienti in posto pari negativi: onde in una equazione qualunque, che abbia per coefficiente del primo termine l'unità, sarà il coefficiente del secondo termine col segno mutato eguale alla somma delle radici, il coefficiente del terzo termine col suo segno eguale alla somma dei prodotti delle radici prese due a due, e così degli altri.

37.

Passiamo a dimostrare un altro utilissimo teorema, il quale c'insegna a trovar la somma delle potenze di tutte le radici. Sia proposta adunque l'equazione (E)

$$(E)\quad x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}\ldots\pm T=0$$

di cui le radici siano $a, b, c, \ldots. t$, e si ponga

$$P=a+b+c\ldots.+t$$
$$P^{(2)}=a^2+b^2+c^2\ldots.+t^2$$

ed in generale

$$P^{(r)}=a^r+b^r+c^r\ldots.+t^r$$

Sostituiamo nella proposta in luogo di x tutte le sue radici, ed avremo

$$a^m - Aa^{m-1} + Ba^{m-2} - Ca^{m-3} \ldots\ldots \pm T = 0$$
$$b^m - Ab^{m-1} + Bb^{m-2} - Cb^{m-3} \ldots\ldots \pm T = 0$$
$$c^m - Ac^{m-1} + Bc^{m-2} - Cc^{m-3} \ldots\ldots \pm T = 0$$
$$\vdots$$
$$t^m - At^{m-1} + Bt^{m-2} - Ct^{m-3} \ldots\ldots \pm T = 0$$

e sommando quest' equazioni avremo

$$a^m + b^m + c^m \ldots + t^m - A\left(a^{m-1} + b^{m-1} \ldots + t^{m-1}\right)$$
$$+ B\left(a^{m-2} + b^{m-2} \ldots + t^{m-2}\right) - C\left(a^{m-3} \ldots + t^{m-3}\right) \ldots \pm mT = 0$$

o sia sostituendo le lettere P, $P^{(2)}$, ec. in luogo de' loro valori

$$P^{(m)} = AP^{(m-1)} - BP^{(m-2)} + CP^{(m-3)} \ldots \mp mT.$$

Moltiplicando adesso la proposta per x otterremo

$$x^{m+1} = Ax^m - Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots \mp Tx$$

e sostituendovi le radici a, b, c, ec.

$$a^{m+1} = Aa^m - Ba^{m-1} + Ca^{m-2} \ldots \mp Ta$$
$$b^{m+1} = Ab^m - Bb^{m-1} + Cb^{m-2} \ldots \mp Tb$$

ec.

e sommando avremo

$$P^{(m+1)} = AP^{(m)} - BP^{(m-1)} + CP^{(m-2)} \ldots \mp TP.$$

Similmente se moltiplichiamo la proposta per x^2, troveremo

$$P^{(m+2)} = AP^{(m+1)} - BP^{(m)} + CP^{(m-1)} \ldots \mp TP^{(2)}.$$

Onde in generale, se r è $>m$, sarà sempre

$$P^{(r)} = AP^{(r-1)} - BP^{(r-2)} + CP^{(r-3)} - \text{ec.}$$

Un simile teorema ha luogo nel caso di $r<m$: per dimostrarlo supponghiamo che l' equazione (E) si divida pel fattore $x-a$, poi la medesima equazione (E) pel fattore $x-b$, e così in seguito fino all' ultimo fattore $x-t$; ne nasceranno le seguenti equazioni (G)

$$x^{m-1}-A'x^{m-2}+B'x^{m-3}-C'x^{m-4}\ldots\mp S'=0$$
$$x^{m-1}-A''x^{m-2}+B''x^{m-3}-C''x^{m-4}\ldots\mp S''=0$$
$$x^{m-1}-A'''x^{m-2}+B'''x^{m-3}-C'''x^{m-4}\ldots\mp S'''=0$$
$$\vdots$$
$$x^{m-1}-A^{(m)}x^{m-2}+B^{(m)}x^{m-3}-C^{(m)}x^{m-4}\ldots\mp S^{(m)}=0.$$

Io dico che sarà

$$A'+A''+A'''\ldots+A^{(m)}=(m-1)A$$
$$B'+B''+B'''\ldots+B^{(m)}=(m-2)B$$
$$C'+C''+C'''\ldots+C^{(m)}=(m-3)C$$
$$\vdots$$
$$S'+S''+S'''\ldots+S^{(m)}=S$$

Poichè le radici dell' equazioni (G) sono le radici medesime della proposta eccettuatane una, la quale si muta in ciascuna di quell' equazioni. Onde essendo A', A'', ec. le somme delle radici delle respettive equazioni, nella unione delle quantità A', A'', ec. ciascuna radice sarà contenuta $m-1$ volte, e perciò sarà $A'+A''+A'''\ldots+A^{(m)}=$ alla somma di tutte le radici moltiplicata per $m-1$, cioè $=(m-1)A$. Così essendo B', B'', ec. i prodotti di due radici delle respettive equazioni, qualunque prodotto per esempio ab mancando in due di queste quantità B', B'', ec. si troverà in tutte le altre, onde sarà $B'+B''+B'''\ldots+B^{(m)}$ eguale ai prodotti di due radici presi $m-2$ volte, cioè sarà $=(m-2)B$. Nella medesima guisa si dimostrerà il resto.

Ora essendo per le cose precedenti (35)

$$A'=A-a$$
$$A''=A-b$$
$$\vdots$$
$$A^{(m)}=A-t$$

sarà $A'+A''\ldots+A^{(m)}=(m-1)A=mA-P$, cioè $P=mA-(m-1)A=A$.

Inoltre sarà (35)

$$B'=B-aA'=B-aA+a^2$$
$$B''=B-bA+b^2$$
$$\vdots$$
$$B^{(m)}=B-tA+t^2$$

e quindi $B'+B''\ldots+B^{(m)}=(m-2)B=mB-AP+P^{(2)}$, cioè $P^{(2)}=AP-2B$.

Similmente (35)

$$C'=C-aB'=C-aB+a^2A-a^3$$
$$C''=C-bB+b^2A-b^3$$
$$\vdots$$
$$C^{(m)}=C-tB+t^2A-t^3$$

e perciò $C'+C''\ldots+C^{(m)}=(m-3)C=mC-BP+AP^{(2)}-P^{(3)}$, cioè $P^{(3)}=AP^{(2)}-BP+3C$.

Continuando col medesimo metodo vedremo in generale, qualunque sia r o maggiore o minore di m, esser sempre

$$P^{(r)}=AP^{(r-1)}-BP^{(r-2)}+CP^{(r-3)}\ldots\pm rR$$

ove R è nell'equazione (E) il coefficiente della potestà x^{m-r}, e per riguardo al segno ambiguo $\pm$, il segno $+$ si deve prendere nel caso di r dispari, ed il segno $-$, quando r è pari.

38.

Trovate le somme delle potenze delle radici di una data equazione, si potranno anche ottenere le somme di tutti i prodotti, che si possono formare delle radici della medesima. Siano a, b, c, d, ec. queste radici, e rappresentiamo col segno $P^{(m,\,n)}$ la somma di tutti i prodotti della forma $a^m b^n$, che si possono fare con le radici, ponendone ciascuna in luogo dell'altra: in modo che se le radici sono due sole a, b, sia

$p^{(m,\,n)} = a^m b^n + b^m a^n$, se sono tre a, b, c, sia
$p^{(m,\,n)} = a^m b^n + b^m a^n + a^m c^n + c^m a^n + b^m c^n + c^m b^n$, e così in seguito se le radici fossero in maggior numero, si aggiungano ai precedenti termini quei che nascono dalle nuove radici. Similmente sia $p^{(m,\,n,\,p)}$ la somma di tutti i prodotti della forma $a^m b^n c^p$; $p^{(m,n,p,q)}$ la somma di tutti i prodotti della forma $a^m b^n c^p d^q$, ec. e sia proposto di trovare il valore di queste quantità, quantunque non si conoscano le radici a, b, c, ec.

A questo effetto si osservi, che moltiplicata $p^{(m)}$ cioè $a^m + b^m + c^m +$ ec. per $p^{(n)}$ o sia $a^n + b^n + c^n +$ ec. ne nasceranno tutti i termini della forma a^{m+n}, e tutti quelli della forma $a^m b^n$, onde sarà $p^{(m)}.p^{(n)} = p^{(m+n)} + p^{(m,\,n)}$, e quindi $p^{(m,\,n)} = p^{(m)}.p^{(n)} - p^{(m+n)}$, cioè si conoscerà il valore di $p^{(m,\,n)}$, perchè dalle formule precedenti abbiamo quelli di $p^{(m)}$, $p^{(n)}$, $p^{(m+n)}$.

Così pure se moltiplichiamo $p^{(m,\,n)}$ per $p^{(p)}$, questo prodotto conterrà prima tutti i termini della forma $a^{m+p} b^n$, poi quelli della forma $a^{n+p} b^m$, e finalmente quei della forma $a^m b^n c^p$. Quindi avremo $p^{(m,\,n)}.p^{(p)} = p^{(m+p,\,n)} + p^{(n+p,\,m)} + p^{(m,n,p)}$, e perciò $p^{(m,n,p)} = p^{(m,\,n)}.p^{(p)} - p^{(m+p,\,n)} - p^{(n+p,\,m)}$; cioè avremo il valore di $p^{(m,n,p)}$, perchè già conosciamo quelli di $p^{(r)}$ e di $p^{(r,s)}$.

Col medesimo discorso troveremo $p^{(m,n,p,q)} = p^{(m,n,p)}.p^{(q)} - p^{(m+q,\,n,p)} - p^{(m,\,n+q,\,p)} - p^{(m,\,n,p+q)}$; e in simil guisa le somme dei prodotti di un maggior numero di fattori.

Per dare un esempio sia proposta l'equazione $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$, la quale paragonata coll'equazione generale (E) ci dà $A = 2$, $B = -1$, $C = -2$, e si voglia il valore di

$P^{(1,2,3)}$, cioè la somma di tutti i prodotti ab^2c^3, che si possono formare colle radici della equazione data. Nel valore di $P^{(m,n,p)}$ ponendo $m=1$, $n=2$, $p=3$ avremo
$P^{(1,2,3)}=P^{(1,2)}.P^{(3)}-P^{(4,2)}-P^{(5,1)}$, onde bisognerà cercar prima i valori di P, $P^{(2)}\ldots P^{(6)}$, poi quelli di $P^{(1,2)}$, $P^{(4,2)}$, $P^{(5,1)}$. Ora abbiamo $P=2$, $P^{(2)}=6$, $P^{(3)}=8$, $P^{(4)}=18$, $P^{(5)}=32$, $P^{(6)}=66$, $P^{(1,2)}=P.P^{(2)}-P^{(3)}=4$, $P^{(4,2)}=P^{(4)}.P^{(2)}-P^{(6)}=42$, $P^{(5,1)}=P^{(5)}.P-P^{(6)}=-2$: sarà dunque $P^{(1,2,3)}=32-42+2=-8$.

Convien riflettere, che nel caso di $m=n$ i termini $a^m b^n c^p$ ec., $a^n b^m c^p$ ec. sono eguali, e così pure sono eguali a due a due quelli, che compongono il valore di $P^{(m,n,p,\text{ec.})}$; onde se volessimo la somma de' soli termini dissimili, dovremmo dividere il valore di $P^{(m,n,p,\text{ec.})}$ per 2. Similmente se $m=n=p$, i termini $a^m b^n c^p$ ec., $a^m c^n b^p$ ec., $b^m a^n c^p$ ec., $b^m c^n a^p$ ec., $c^m a^n b^p$ ec., $c^m b^n a^p$ ec. sono eguali, e così pure tutti gli altri termini del valore di $P^{(m,n,p,\text{ec.})}$ sono eguali a sei a sei; e perciò allorchè si vogliono i soli termini disuguali, convien dividere il valore di $P^{(m,n,p,\text{ec.})}$ per $6=2.3$. Nell'istessa guisa se si vogliono i soli termini disuguali, allorchè $m=n=p=q$, o quando $m=n$ e $p=q$, il valore di $P^{(m,n,p,\text{ec.})}$ si deve dividere nel primo caso per $2.3.4$, nel secondo per 2.2, e così in seguito.

39.

Venghiamo alle trasformazioni dell'equazioni, e in primo luogo una data equazione (E)

$$(E)\quad x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots \pm T = 0$$

si debba trasformare in un'altra, le radici della quale siano eguali alle radici della proposta moltiplicate per h. Si faccia

$x=\frac{y}{h}$, e sostituendosi questo valore di x nella equazione (E) si avrà

$$\frac{y^m}{h^m}-A\frac{y^{m-1}}{h^{m-1}}+B\frac{y^{m-2}}{h^{m-2}}-C\frac{y^{m-3}}{h^{m-3}}\ldots\pm T=0.$$

o sia moltiplicando per h^m

$$y^m-Ahy^{m-1}+Bh^2y^{m-2}-Ch^3y^{m-3}\ldots\pm Th^m=0$$

Ora essendo $x=\frac{y}{h}$, sarà $y=hx$, cioè le radici della trasformata saranno eguali a quelle della proposta moltiplicate per h. Si osservi che la trasformata non differisce dalla proposta, se non che i termini di questa sono respettivamente moltiplicati per i termini della progressione geometrica $1, h, h^2, h^3$, ec.: onde se i termini di una data equazione (E) si moltiplicheranno per i termini della progressione $1, \frac{h}{k}, \frac{h^2}{k^2}$, ec., l'equazione

$$x^m-A\frac{h}{k}x^{m-1}+B\frac{h^2}{k^2}x^{m-2}-C\frac{h^3}{k^3}x^{m-3}\ldots\pm T\frac{h^m}{k^m}=0$$

che ne risulta, avrà le sue radici eguali alle radici della proposta moltiplicate per $\frac{h}{k}$, o sia staranno queste a quelle come k ad h.

Si debba adesso trasformare un'equazione qualunque in un'altra in modo, che le radici positive conservando il loro valore divengano negative, e le negative si cangino in positive. Si faccia $x=-y$, e sarà anche $y=-x$; onde dopo questa sostituzione le radici acquisteranno segni diversi. Se l'equazione è di grado pari, siccome le potestà pari di x non soffrono alcuna mutazione, si dovranno semplicemente mutare i segni de' termini che sono in posto pari. Al contrario se l'equazione è di grado dispari, si dovranno mutare i segni dei termini che sono in posto dispari. Ma poichè salva l'equazione si possono mutare i segni a tutti i termini, anche in questo caso la cosa si riduce a cangiare i segni de' termini situati in posto pari.

Ora proposta qualunque equazione (E)

$$(E)\quad x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}\ldots\pm T=0$$

se ne debba trovare un'altra, che abbia per radici le radici della proposta accresciute o diminuite della quantità h. Facciamo $x=h+y$, e sostituendo questo valore avremo la cercata equazione

$$h^m-Ah^{m-1}+Bh^{m-2}-Ch^{m-3}\ldots\ldots\pm T$$
$$+\left(mh^{m-1}-(m-1)Ah^{m-2}+(m-2)Bh^{m-3}-(m-3)Ch^{m-4}+\text{ec.}\right)y$$
$$+\left(\frac{m(m-1)}{2}h^{m-2}-\frac{(m-1)(m-2)}{2}Ah^{m-3}+\text{ec.}\right)y^2$$
$$+\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}h^{m-3}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}Ah^{m-4}+\text{ec.}\right)y^3$$
$$+\text{ ec.}=0.$$

Questa equazione è scritta in ordine inverso, e cominciando dall'ultimo termine passa al penultimo, ed agli altri gradatamente, e le di lei radici sono eguali a quelle della proposta diminuite di h, perchè $y=x-h$. Che se le radici della proposta si dovranno accrescere, in questo caso in luogo di h si dovrà scrivere $-h$.

È chiaro, che l'ultimo termine della trasformata si ottiene scrivendo nel primo membro della proposta h in luogo di x, il coefficiente del penultimo, se ciascun termine dell'ultimo si moltiplica per gli esponenti respettivi di h, poi si divide per h, e in questo mancherà il termine T, perchè in esso l'esponente di h è $=0$: dal penultimo si otterranno gradatamente i termini seguenti nella medesima maniera, ma converrà inoltre dividerli respettivamente per 2, 3, 4, ec. Per maggiore schiarimento, se chiamiamo A', $B'y$, $C'y^2$, $D'y^3$, ec. i termini dell'equazione cercata, sarà

$$A'=h^m-Ah^{m-1}+Bh^{m-2}\ldots\mp Qh^3\pm Rh^2\mp Sh\pm T$$
$$B'=mh^{m-1}-(m-1)Ah^{m-2}+(m-2)Bh^{m-3}\ldots\mp 3Qh^2\pm 2Rh\pm S$$
$$C'=\frac{m(m-1)}{2}h^{m-2}-\frac{(m-1)(m-2)}{2}Ah^{m-3}\ldots\mp 3Qh\pm R$$
$$D'=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}h^{m-3}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}Ah^{m-4}\ldots\mp Q$$

ec.

Per esempio l'equazione $x^4-2x^3+3x^2-4x+5=0$ si voglia tra-

sformare in un'altra, che abbia le medesime radici diminuite della quantità h. Sarà

$$A'=h^4-2h^3+3h^2-4h+5$$
$$B'=4h^3-6h^2+6h-4$$
$$C'=6h^2-6h+3$$
$$D'=4h-2$$
$$E'=1$$

e l'equazione cercata sarà

$$y^4+(4h-2)y^3+(6h^2-6h+3)y^2+(4h^3-6h^2+6h-4)y$$
$$+h^4-2h^3+3h^2-4h+5=0,$$

la quale posta $h=-1$ diventa

$$y^4-6y^3+15y^2-20y+15=0$$

e le radici di questa equazione superano di una unità le radici della proposta.

Nel ricercare la precedente trasformata abbiamo incominciate le sostituzioni dal termine h: che se le cominceremo dal termine y, avremo invero la medesima trasformata, ma con altr' ordine di termini. Ponendo infatti $x=y+h$ avremo quest'equazione sotto la forma

$$y^m+(mh-A)y^{m-1}+\left(\frac{m(m-1)}{2}h^2-(m-1)Ah+B\right)y^{m-2}$$
$$+\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}h^3-\frac{(m-1)(m-2)}{2}Ah^2+(m-2)Bh-C\right)y^{m-3}+\text{ec.}=0$$

Di qui apparisce, come da una data equazione si possa togliere il secondo termine. Nella trasformata, che abbiamo adesso ottenuta svanirà il secondo termine, se sarà $mh-A=0$, o sia $h=\frac{A}{m}$; e perciò se ponghiamo $x=y+\frac{A}{m}$, nell'equazione risultante mancherà il secondo termine. Il terzo termine svanirà, se sarà $\frac{m(m-1)}{2}h^2-(m-1)Ah+B=0$, cioè $h=\frac{A}{m}\pm\sqrt{\left(\frac{A^2}{m^2}-\frac{2B}{m^2-m}\right)}$. Nella stessa maniera si potrà togliere dall'equazione il quarto, il quinto termine, e gli altri. Ma ciò per lo più è inutile: la mancanza del secondo termine è spesso utilissima.

40.

Se nella trasformata precedente ponghiamo $h=M+1$, ne nascerà

$$A'=(M+1)^m-A(M+1)^{m-1}+B(M+1)^{m-2}\dots\pm T.$$

Ora se $-M$ è il massimo coefficiente negativo dell'equazione proposta, io dico che A' sarà positiva. Per dimostrar ciò si osservi, che $(M+1)^2=M(M+1)+M+1$, $(M+1)^3$ $=M(M+1)^2+(M+1)^2=M(M+1)^2+M(M+1)+M+1$, $(M+1)^4=M(M+1)^3+(M+1)^3=M(M+1)^3+M(M+1)^2$ $+M(M+1)+M+1$, e generalmente

$$(M+1)^m=M(M+1)^{m-1}+M(M+1)^{m-2}\ldots+M+1.$$

Siccome M è il massimo coefficiente negativo dell'equazione, se nell'espressione di A' ponghiamo in luogo del primo termine $(M+1)^m$ il di lui valore adesso trovato, vedremo facilmente che questo primo termine è maggiore della somma di tutti i seguenti; onde il valore di A' è positivo, quando anche tutti i termini $A(M+1)^{m-1}$, ec. fossero negativi. Nella medesima ipotesi di $h=M+1$, sarà

$$B'=m(M+1)^{m-1}-(m-1)A(M+1)^{m-2}+(m-2)B(M+1)^{m-3}+\text{ec.}$$

ove se nel primo termine in luogo di $(M+1)^{m-1}$ ponghiamo il suo valore $M(M+1)^{m-2}+M(M+1)^{m-3}\ldots+M+1$, vedremo che questo primo termine è maggiore di tutti gli altri presi insieme, e quindi la quantità B' è positiva. In simil guisa si dimostrerà che tutti i coefficienti C', D', ec. della trasformata son positivi; onde le radici reali della trasformata sono in questo caso tutte negative (35): e siccome $x-M-1=y$, ed y negativa, sarà $M+1>x$, cioè maggiore della massima radice positiva della proposta.

Una quantità maggiore di tutte le radici positive della proposta si chiama il limite delle radici positive, e per esso può prendersi il massimo coefficiente negativo accresciuto dell'unità, ma spesso non sarà questo il limite più prossimo. Per averlo convien cercare il minimo valore di h, che renda positive tutte le quantità A', B', C', ec. Prendiamo per esempio l'equazione $x^4-2x^3+3x^2-4x+5=0$ (39), ove -4 essendo il massimo coefficiente negativo, possiamo prender 5 per limite delle radici positive. Ma per avere se è possibile questo limite più prossimo alle radici cerchiamo il valore di h, che rende positive le quantità A', B', ec. Primieramente $h=1$ rende positiva la quantità D', ed un valore qualunque di h maggiore di 1 fa lo stesso

effetto. Anche C' è resa positiva da $h=1$, ma questo valore rende $B'=0$; onde convien prendere $h=2$, e come $h=2$ rende positiva anche A', sarà 2 il più prossimo limite delle radici positive.

41.

Ritornando alle trasformazioni osserviamo, che generalmente qualunque trasformazione si riduce alla ricerca di una equazione, le radici della quale hanno una data relazione con le radici della proposta. Chiamate a, b, c, d, ec. le radici della proposta, se ne formino quelle della trasformata richiesta, ed il loro numero ci darà il grado della trasformata, la loro somma il coefficiente del secondo termine, la somma de' prodotti a due a due il coefficiente del terzo, ec. Qualunque sia la relazione data, purchè sia razionale, questi coefficienti saranno espressi per i prodotti e per le potenze delle radici della proposta, e quindi per le cose precedenti (37, e 38) saranno dati per i coefficienti della proposta. Facciamo l'applicazione di questo metodo ad alcuni casi.

L'equazione data

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots \pm T = 0$$

si debba trasformare in un'altra, le radici della quale siano le potenze n.^{esime} delle radici della proposta. Saranno a^n, b^n, c^n, ec. le radici della trasformata, ed il loro numero m; onde se rappresentiamo questa equazione per

$$y^m - A'y^{m-1} + B'y^{m-2} - C'y^{m-3} \ldots \pm T' = 0$$

sarà $A' = a^n + b^n + c^n + \text{ec.} = P^{(n)}$, $B' = a^n b^n + a^n c^n + \text{ec.}$ $= \dfrac{P^{(n,\,n)}}{2}$, $C' = a^n b^n c^n + a^n b^n d^n + \text{ec.} = \dfrac{P^{(n,n,n)}}{2.3}$,

$D' = \dfrac{P^{(n,n,n,n)}}{2.3.4}$, ec. Sia proposta per esempio l'equazione $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$, ove $A=2$, $B=1$, $C=1$, e sia $n=2$. Avremo $P=2$, $P^{(2)}=2$, $P^{(3)}=5$, $P^{(4)}=10$, $P^{(5)}=17$, $P^{(6)}=29$, $P^{(2,2)}=-6$, $P^{(2,2,2)}=6$, e quindi $A'=2$, $B'=-3$, $C'=1$, e le radici dell'equazione $y^3 - 2y^2 - 3y - 1 = 0$ saranno i quadrati delle radici della proposta.

Adesso un'equazione qualunque si debba trasformare in un'altra, che abbia per radici le somme di due qualunque delle radici della proposta, cioè $a+b$, $a+c$, $a+d$, ec., $b+c$, $b+d$, ec. È facile il vedere, che il numero di queste radici è $=\frac{m(m-1)}{2}$, e posto questo numero $=n$, sia la trasformata

$$y^n - A'y^{n-1} + B'y^{n-2} - C'y^{n-3} \ldots \pm V' = 0.$$

Per trovare più facilmente i coefficienti A', B', ec., rappresentiamo per $Q^{(r)}$ la somma delle potenze $r.^{esime}$ delle radici di questa trasformata, o sia la somma dei binomj $(a+b)^r$, $(a+c)^r$, $(a+d)^r$, ec., $(b+c)^r$, ec., e vedremo che il valore di $Q^{(r)}$ conterrà prima le potenze $r.^{esime}$ delle radici della proposta moltiplicate per $m-1$, perchè in $m-1$ binomj è compresa ciascuna di queste radici, poi la somma dei termini della forma $a^{r-1}b$ moltiplicati per r, i termini della forma $a^{r-2}b^2$ moltiplicati per $\frac{r(r-1)}{2}$, quei della forma $a^{r-3}b^3$ moltiplicati per $\frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}$, e così in seguito. Onde sarà

$$Q^{(r)} = (m-1)P^{(r)} + rP^{(r-1,1)} + \frac{r(r-1)}{2}P^{(r-2,2)}$$

$$\ldots\ldots + \frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+2}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{r}{2}} \cdot \frac{P^{\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)}}{2}$$

nel caso di r pari, e

$$Q^{(r)} = (m-1)P^{(r)} + rP^{(r-1,1)} + \frac{r(r-1)}{2}P^{(r-2,2)}$$

$$\ldots\ldots + \frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+3}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{r-1}{2}} . P^{\left(\frac{r+1}{2},\frac{r-1}{2}\right)}$$

nel caso di r dispari. Se nella prima di quest'espressioni sostituiamo i valori di $P^{(r-1,1)}$, $P^{(r-2,2)}$, ec. (38), avremo

$$Q^{(r)}=(m-1)P^{(r)}+rP.P^{(r-1)}\ldots+\frac{r(r-1)\ldots\left(\frac{r+2}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{r}{2}}.\frac{P^{\left(\frac{r}{2}\right)}.P^{\left(\frac{r}{2}\right)}}{2}$$

$$-P^{(r)}\left(r+\frac{r(r-1)}{2}\ldots\ldots+\frac{r(r-1)\ldots\left(\frac{r+2}{2}\right)}{2.2.3\ldots\frac{r}{2}}\right).$$

Ma la quantità $r+\frac{r(r-1)}{2}\ldots\ldots+\frac{r(r-1)\ldots\left(\frac{r+2}{2}\right)}{2.2.3\ldots\frac{r}{2}}$ è evidentemente $=\frac{(1+1)^r}{2}-1=2^{r-1}-1$; dunque avremo nel caso di r pari

$$Q^{(r)}=(m-2^{r-1})P^{(r)}+rP.P^{(r-1)}+\frac{r(r-1)}{2}P^{(2)}.P^{(r-2)}$$

$$\ldots\ldots+\frac{r(r-1)\ldots\left(\frac{r+2}{2}\right)}{2.3\ldots\ldots\frac{r}{2}}.\frac{P^{\left(\frac{r}{2}\right)}.P^{\left(\frac{r}{2}\right)}}{2}.$$

E col medesimo discorso vedremo, che nel caso di r dispari sarà

$$Q^{(r)}=(m-2^{r-1})P^{(r)}+rP.P^{(r-1)}+\frac{r(r-1)}{2}P^{(2)}.P^{(r-2)}$$

$$\ldots\ldots+\frac{r(r-1)\ldots\left(\frac{r+3}{2}\right)}{2.3\ldots\ldots\frac{r-1}{2}}.P^{\left(\frac{r-1}{2}\right)}.P^{\left(\frac{r+1}{2}\right)}.$$

Trovati in tal modo i valori di Q, $Q^{(2)}$, ec. avremo (37)

$$\begin{aligned}
Q&=A'\\
Q^{(2)}&=A'Q-2B'\\
Q^{(3)}&=A'Q^{(2)}-B'Q+3C'\\
Q^{(4)}&=A'Q^{(3)}-B'Q^{(2)}+C'Q-4D'\\
&\text{ec.}
\end{aligned}$$

e quindi

$$A'=Q$$
$$B'=\frac{A'Q-Q^{(2)}}{2}$$
$$C'=\frac{B'Q-A'Q^{(2)}+Q^{(3)}}{3}$$
$$D'=\frac{C'Q-B'Q^{(2)}+A'Q^{(3)}-Q^{(4)}}{4}$$
ec.

Per trovare le trasformate si può alcune volte usare un altro metodo, di cui daremo un esempio. Proposta l'equazione

$$x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}\ldots\pm T=0$$

di cui le radici sono a, b, c, ec., se ne debba trovare un'altra, che abbia per radici le quantità $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, ec. $\frac{b}{a}$, $\frac{b}{c}$, ec. $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$, ec. È chiaro che il grado di questa trasformata sarà $=m(m-1)$, e col solito metodo si potrebbero trovare i di lei coefficienti; ove si osservi che essendo y una radice, ve ne sarà un'altra $=\frac{1}{y}$, e perciò la trasformata sarà tale, che rimarrà la stessa ponendovi $\frac{1}{y}$ in luogo di y, cioè l'ultimo termine sarà eguale al coefficiente del primo, il coefficiente del penultimo sarà eguale a quello del secondo, e così degli altri: la quale osservazione toglie la metà della fatica. Ma invece del metodo solito si potrà usare anche il seguente: sia x' una radice della proposta diversa da x, ed avremo similmente

$$x'^m-Ax'^{m-1}+Bx'^{m-2}-Cx'^{m-3}\ldots\pm T=0.$$

Ora poichè $y=\frac{x'}{x}$, e quindi $x'=xy$, si sostituisca questo valore di x', ed avrassi

$$x^my^m-Ax^{m-1}y^{m-1}+Bx^{m-2}y^{m-2}\ldots\pm T=0.$$

A questa equazione soddisfà $y=1$; onde si potrà dividere per $y-1$, e fatta la divisione ne nascerà una equazione della forma

$$x^my^{m-1}-Py^{m-2}+Qy^{m-3}-\text{ec.}=0.$$

Per mezzo di questa e della proposta si elimini x, e si otterrà la ricercata equazione in y. Insegneremo in appresso come si

debba eseguire questa eliminazione. Se avessimo omessa la divisione per $y-1$, la trasformata oltre le radici $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, ec. $\frac{b}{a}$, ec. avrebbe avute anche le radici $\frac{a}{a}$, $\frac{b}{b}$, $\frac{c}{c}$, ec. cioè m radici $=1$. Infatti $y=1$ ci dà $x'=x$; e perciò il fattore $y-1$ è superfluo, quando si vuole che le due radici x ed x' siano disuguali; ed allorchè questo fattore si ammette, esso ci dà i casi, ne' quali $x'=x$.

42.

Se due quantità reali h e k sostituite in una equazione in luogo della incognita rendono il primo membro una positivo, e l'altra negativo, l'equazione avrà per lo meno una radice reale, i di cui *limiti* saranno h e k, cioè una di queste quantità sarà maggiore, e l'altra minore della radice. Sia P la somma di tutti i termini positivi della equazione, e $-Q$ la somma di tutti i termini negativi, in modo che la proposta sia $P-Q=0$. Supponghiamo primieramente le quantità h e k ambedue positive, e $k>h$; se posta $x=h$ è il primo membro $P-Q$ positivo, e posta $x=k$ è $P-Q$ negativo, è chiaro che nel primo caso P è $>Q$, e nel secondo $P<Q$. Ma siccome le quantità P e Q sono ciascuna composte di termini positivi e di potenze intere, è evidente che esse cresceranno al crescer di x, e che aumentandosi x per gradi insensibili da h fino a k esse pure aumenteranno per gradi insensibili, ma P crescerà meno di Q, perchè di più grande, che era prima, è poi divenuta la più piccola, e perciò vi sarà un valore di x tra i due valori di h e di k, nel quale sarà P eguale a Q. Ciò si rende sensibile, se si paragona al caso di due mobili, i quali partendo da due punti differenti percorrono in modo la medesima linea, che quello, il quale era prima indietro, si trovi in seguito più avanti dell'altro; perchè è evidente che essi devono essersi necessariamente incontrati nella loro strada. Questo valore di x, che renderà P eguale a Q, sarà dunque una radice reale della proposta, e caderà tra h e k. Se posta $x=h$ fosse $P-Q$ negativa, e posta $x=k$ fosse $P-Q$ positiva, avrà luogo il medesimo discorso, e solo dovrà in esso cangiarsi P in Q e viceversa.

Se le due quantità h e k, o una di esse fosse negativa, se ne prenda una terza r in modo, che $r+h$, e $r+k$ siano ambedue

positive, e si trasformi la proposta ponendovi $y-r$ in luogo di x. Sostituendo nel primo membro della trasformata $r+h$ ed $r+k$ in luogo di y avremo due resultati di segno contrario, perchè questi resultati sono quei medesimi, che si otterrebbero ponendo h e k in luogo di x nella proposta. Avrà dunque pel ragionamento precedente la trasformata una radice reale compresa tra $r+h$ ed $r+k$, e perciò, a motivo di $x=y-r$, anche la proposta avrà una radice reale compresa tra h e k.

Pertanto, se una equazione ha l'ultimo termine negativo, avrà sicuramente per lo meno una radice reale positiva. Sia questa equazione

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots - T = 0,$$

e facendo nel primo membro $x=0$ avremo un resultato negativo $-T$. Ora se l rappresenta il limite delle radici positive della proposta, e facciamo $x=l$, il primo membro diventerà positivo (40). Una radice adunque cade tra 0 ed l, e perciò è positiva.

Se essendo pari il grado m si pone in questa equazione $-x$ in luogo di x, l'ultimo termine rimarrà negativo; onde questa nuova equazione avrà una radice positiva, e quindi la proposta una radice negativa. Se il grado è dispari e l'ultimo termine positivo, ponendovi $-x$ in luogo di x l'ultimo termine diventerà negativo, e la nuova equazione avendo una radice positiva, ne segue che la proposta avrà una radice negativa.

Una equazione di grado dispari avrà sempre un numero dispari di radici reali; perchè se si vuole che questo numero sia pari, tolte queste radici mediante la divisione dell'equazione per altrettanti fattori, l'equazione che ne risulta sarà di grado dispari, ed avrà perciò un'altra radice reale. Nell'istessa maniera si dimostrerà, che una equazione di grado pari ha sempre un numero pari di radici reali: onde qualunque equazione non può avere che un numero pari di radici immaginarie.

Se una equazione ha tutte le sue radici immaginarie, il di lei primo membro si manterrà sempre positivo, qualunque quantità reale vi si sostituisca in luogo di x. Poichè se due sostituzioni dassero resultati di segno contrario, la proposta avrebbe contro l'ipotesi una radice reale compresa tra le due quantità, che sostituite hanno dati questi resultati di segno contrario.

43.

Le radici imaginarie dell'equazioni sono sempre della forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. Fatta la divisione di una equazione proposta per i di lei fattori reali se ne ha, essa diventerà della forma

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\ldots+T=0$$

ove m è pari, e l'ultimo termine è sempre positivo, perchè se fosse negativo, rimarrebbero altri fattori reali. Si faccia $x^m=-y^m$, o sia $x=y\sqrt[m]{-1}$, e l'equazione diventerà

$$y^m+\frac{A}{\sqrt[m]{-1}}y^{m-1}+\frac{B}{(\sqrt[m]{-1})^2}y^{m-2}\ldots-T=0.$$

Se i coefficienti di questa equazione fossero reali, l'equazione avrebbe a motivo dell'ultimo termine negativo una radice reale composta per mezzo di analitiche operazioni dei medesimi coefficienti. Si prenda dunque l'equazione

$$z^m+az^{m-1}+bz^{m-2}\ldots-T=0$$

ove i coefficienti a, b, ec. siano reali, e la radice reale di questa equazione sarà, qualunque sia, composta de' coefficienti a, b, ec. Ma se invece di a, b, ec. vi porremo $\frac{A}{\sqrt[m]{-1}}$, $\frac{B}{(\sqrt[m]{-1})^2}$, ec., il valore di z diventerà quello di y, e sarà composto di quantità tutte riducibili alla forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$; onde anche il valore di y, e quindi quello di x sarà riducibile alla forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

Ma se una equazione (E) ha una radice della forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, ne avrà un'altra della forma $\alpha-\beta\sqrt{-1}$. Infatti l'equazione $(E)=0$ potendosi dividere per $x-\alpha-\beta\sqrt{-1}$, si faccia la divisione, ed il quoziente sia $m+n\sqrt{-1}$, ove m contiene tutti i termini reali, ed $n\sqrt{-1}$ gl'imaginarj. Sarà dunque $(E)=(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})(m+n\sqrt{-1})=(x-\alpha)m+\beta n+(x-\alpha)n\sqrt{-1}$ $-\beta m\sqrt{-1}$. Ma come la quantità (E) si suppone di una forma tutta reale, convien che si distruggano tra loro stessi gl'imaginarj, cioè che sia $(x-\alpha)n-\beta m=0$, e l'equazione $(E)=0$ sarà $(x-\alpha)m+\beta n=0$. Ora io dico che questa equazione è divisibile per $x-\alpha+\beta\sqrt{-1}$, e che il quoziente è $m-n\sqrt{-1}$, poichè fatta la moltiplicazione ne nascerà

$(x-a)m+\beta n-(x-a)n\sqrt{-1}+\beta m\sqrt{-1}=0$, che è l'istessa equazione (E) a motivo di $(x-a)n=\beta m$. È dunque l'equazione (E) divisibile per $x-a+\beta\sqrt{-1}$, e perciò $a-\beta\sqrt{-1}$ è una di lei radice.

Se i due fattori imaginatj $x-a-\beta\sqrt{-1}$, $x-a+\beta\sqrt{-1}$ si moltiplicano tra loro, il prodotto sarà $x^2-2ax+a^2+\beta^2$, cioè reale. Onde, siccome un fattore imaginario essendo $x-a-\beta\sqrt{-1}$, ve n'è sempre un altro $=x-a+\beta\sqrt{-1}$, qualunque equazione è composta di fattori reali del primo, o del secondo grado,

44.

Sia data una equazione qualunque $(E)=0$

$$(E)=x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\ldots\mp Sx\pm T=0,$$

di cui le radici reali disposte per ordine di grandezza siano a, b, c, d ... t, in modo che sia prima scritta la massima positiva; e le altre gradatamente minori, e riguardo alle negative sia scritta prima quella, che prescindendo dal segno è minore, cioè se si hanno -7, e -3, si ponga prima -3, e poi -7. Se chiamiamo F il prodotto dei fattori immaginarj, che contiene la proposta, essa potrà ancora esprimersi così;

$$(E)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-t)F=0.$$

Adesso moltiplicando ciascun termine della proposta pel suo esponente, e dividendolo per x otterremo l'equazione

$$(E')=mx^{m-1}-(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}\ldots\mp S=0,$$

e saranno le radici reali della proposta $(E)=0$ limiti delle radici della equazione $(E')=0$. Infatti in (E') ponghiamo a in luogo di x, e ne verrà

$$ma^{m-1}-(m-1)Aa^{m-2}+(m-2)Ba^{m-3}\ldots\mp S,$$

cioè l'ultimo termine della trasformata, che nasce dalla proposta ponendovi $x+a$ in luogo di x (39). Perchè essendo a una delle radici della equazione $(E)=0$, l'ultimo termine, che invero sarebbe

$$a^m-Aa^{m-1}+Ba^{m-2}\ldots\pm T,$$

svanisce, e perciò il penultimo della trasformata generale diventa l'ultimo nel caso, che h eguagli una delle radici della proposta. Posto ciò, siccome

$$(E)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-t)F=0,$$

ponendo $x+a$ in luogo di x la trasformata sarà

$$(x+a-b)(x+a-c)(x+a-d)\ldots(x+a-t)G=0,$$

ove G è la quantità, in cui si cangia F, quando in luogo di x vi si pone $x+a$. E poichè l'ultimo termine è eguale al prodotto di tutte le radici preso col suo segno, o col segno mutato, secondo che il numero $m-1$ di esse è pari o dispari, sarà

$$ma^{m-1}-(m-1)Aa^{m-2}\ldots\mp S=\pm(a-b)(a-c)(a-d)\ldots(a-t)G1.$$

Nell'istesso modo si dimostrerà essere

$$mb^{m-1}-(m-1)Ab^{m-2}\ldots\mp S=\pm(b-a)(b-c)(b-d)\ldots(b-t)G2$$

$$mc^{m-1}-(m-1)Ac^{m-2}\ldots\mp S=\pm(c-a)(c-b)(c-d)\ldots(c-t)G3,$$

ove $G1$, $G2$, $G3$ sono i valori di F, quando vi si pone $x=a$, $=b$, $=c$; e così in seguito per le altre radici. Ora essendo le quantità $G1$, $G2$, ec. necessariamente positive (42), ed inoltre essendo $a>b$, $b>c$, $c>d$, ec., sarà la quantità $(a-b)(a-c)\ldots(a-t)G1$ positiva, $(b-a)(b-c)\ldots(b-t)G2$ negativa, $(c-a)(c-b)\ldots(c-t)G3$ positiva, e così in seguito. Mentre adunque nella quantità (E') si sostituiscono in luogo di x tutte le radici reali a, b, c, d, ec., essa diviene alternativamente positiva e negativa, e perciò le radici reali della equazione $(E)=0$ sono limiti delle radici della equazione $(E')=0$.

Quindi, se tutte le radici della equazione $(E)=0$ sono reali, anche l'equazione $(E')=0$ avrà tutte le sue radici reali, e se questa ha qualche radice immaginaria, la proposta ne avrà per lo meno altrettante. Se l'equazione $(E')=0$ si moltiplica di nuovo per gli esponenti de' suoi termini, in modo che ne nasca l'equazione $(E'')=0$, questa equazione avrà tutte le radici reali, se tali le ha la proposta $(E)=0$. Perciò se qualunque data equazione $(E)=0$ si moltiplica per la progressione aritmetica m, $m-1$, $m-2$, ec. termine per termine, e l'equazione che ne risulta si moltiplica di nuovo per la progressione $m-1$, $m-2$, $m-3$, ec., e quella che ne nasce di nuovo si moltiplica per la progressione $m-2$, $m-3$, $m-4$, ec., e così in seguito, tutte l'equazioni nate da queste moltiplicazioni, che chiameremo $(E')=0$, $(E'')=0$, $(E''')=0$, ec., non avranno alcuna radice immaginaria, se tutte le radici della proposta sono reali.

La proposizione inversa non è egualmente vera, perchè la proposta può avere assai più radici immaginarie, che non ne ha

l'equazione $(E')=0$. Per ben comprender ciò, siano a', b', c', $d' \ldots s'$ le radici reali di questa equazione disposte per ordine di grandezza; io dico che la proposta non potrà avere che una sola radice maggiore di a', una sola minore di s', ed una sola compresa in ciascuno intervallo tra a' e b', o tra b' e c', ec. Infatti, se la proposta avesse due radici reali maggiori di a', siccome tra queste due caderebbe una radice reale della equazione $(E')=0$, a' non sarebbe la massima tra le radici di questa. Così pure, se tra a' e b' cadessero due radici reali della proposta, poichè tra queste due sarebbe compresa una radice dell'equazione $(E')=0$, a' e b' contro l'ipotesi non si succederebbero in ordine di grandezza, e così in seguito. Ciò posto, se chiamiamo $(E1)$, $(E2)$, $(E3)$, ec., $F1$, $F2$, $F3$, ec. i valori di (E) e di F, quando in luogo di x vi si sostituisce a', b', c', ec., avremo

$$(E1)=(a'-a)(a'-b)(a'-c) \ldots . (a'-t)F1$$
$$(E2)=(b'-a)(b'-b)(b'-c) \ldots . (b'-t)F2$$
$$(E3)=(c'-a)(c'-b)(c'-c) \ldots . (c'-t)F3$$
ec.

Ora è facile il vedere, che se la proposta ha una sola radice maggiore di a', la quantità $(E1)$ sarà negativa; all'opposto sarà positiva, se niuna radice della proposta è maggiore di a'. Se tra a' e b' caderà una sola delle radici a, b, c, ec., le quantità $(E1)$ ed $(E2)$ averanno segno diverso, onde se avessero il medesimo segno, niuna radice reale della proposta sarebbe compresa tra a' e b'. Nell'istessa maniera le due quantità $(E2)$, $(E3)$ avranno il segno diverso, se una radice della proposta caderà tra b' e c', e così delle altre.

Se la proposta ha il medesimo numero di radici immaginarie, che l'equazione $(E')=0$, dovrà necessariamente avere una radice reale maggiore di a', una compresa tra a' e b', un'altra tra b' e c', e così in seguito. Quindi la quantità (E) diventerà in tal caso alternativamente negativa e positiva, allorchè vi si sostituiranno per ordine le radici a', b', $c' \ldots t'$. Che se alcuna di queste condizioni mancherà, ciò sarà un indizio sicuro, che la proposta ha più radici immaginarie, che non ne ha l'equazione $(E')=0$.

Perchè la proposta abbia tutte le sue radici reali, bisogna primieramente, che tutte le radici della equazione $(E1)=0$ siano reali, ma ciò non basta; conviene di più, che queste radici

sostituite per ordine di grandezza nella quantità (E) la rendano alternativamente negativa e positiva. Ma le medesime radici sostituite per ordine nella quantità (E'') la rendono all'opposto alternativamente positiva e negativa. Dunque, se facciamo $y=(E).(E'')$, questa quantità dovrà in tal caso mantenersi sempre negativa, quando vi si sostituiranno le radici della equazione $(E')=0$. Vedremo in seguito, che eliminata x dalle due equazioni $y=(E).(E'')$, ed $(E')=0$ si ottiene una equazione in y, le radici della quale sono i valori di y, che nascerebbero dalle precedenti sostituzioni. Quindi tutte le radici della proposta $(E)=0$ saranno reali, quando saranno tali tutte quelle della equazione $(E')=0$, e quando le radici della equazione in y saranno tutte negative, cioè quando tutti i termini di questa equazione saranno positivi.

In simil guisa si dimostrerà, che l'equazione $(E')=0$ avrà tutte le radici reali, se tali le ha l'equazione $(E'')=0$, e se quella che nasce dalla eliminazione di x tra $y=(E').(E''')=0$ ed $(E'')=0$ avrà tutti i termini positivi, e così in seguito. E siccome gradatamente discendendo arriveremo ad una equazione di secondo grado, nella quale a colpo d'occhio si distingue la realità delle radici, ne potremo dedurre tutte le condizioni necessarie, perchè ciascuna delle precedenti equazioni, ed in fine la stessa proposta abbia tutte le radici reali.

Se i termini della proposta, invece di moltiplicarsi per i loro esponenti, si moltiplicheranno respettivamente per i termini 0, 1, 2, 3, ec.; in modo che ne nasca l'equazione

$$(H)=-Ax^{m-1}+2Bx^{m-2}\ldots\mp(m-1)Sx\pm mT=0,$$

questa equazione avrà per rapporto alla proposta le medesime proprietà, che ha l'equazione $(E')=0$, cioè se la proposta ha tutte le radici reali, le avrà tali ancora l'equazione $(H)=0$, e viceversa se questa ha qualche radice immaginaria, la proposta ne avrà almeno altrettante. Infatti se nella proposta facciamo $x=\frac{1}{y}$, ne nascerà l'equazione

$$1-Ay+By^2\ldots\mp Sy^{m-1}\pm Ty^m=0,$$

la quale avrà tante radici reali o immaginarie, quante la proposta. Se in questa equazione in y moltiplichiamo tutti i termini per i respettivi esponenti, otterremo l'equazione

$$-A+2By \ldots \mp(m-1)Sy^{m-2} \pm mTy^{m-1}=0,$$

la quale posto $x=\frac{1}{y}$ si cangia nella equazione $(H)=0$, ed ha tante radici reali o immaginarie, quante questa. Dunque quella relazione, che passa tra il numero delle radici reali o immaginarie delle due equazioni in y, avrà luogo egualmente tra la proposta e l'equazione $(H)=0$.

Essendo la prima equazione $(E)=0$ del grado $m-1$, se una data equazione si moltiplica per la progressione m, $m-1$, $m-2$, ec. de' suoi esponenti, sparisce l'ultimo termine: similmente se si moltiplica di nuovo per la serie $m-1$, $m-2$, $m-3$, ec. svanisce il penultimo termine; e così se in seguito si moltiplicherà per la serie $m-2$, $m-3$, ec., o per la serie $m-3$, $m-4$, ec. spariranno gradatamente gli altri tra gli ultimi termini che rimangono. Onde perchè svaniscano i due ultimi termini, convien moltiplicare l' equazione per la serie $m(m-1)$, $(m-1)(m-2)$, $(m-2)(m-3)$, ec., per fare sparire i tre ultimi termini, l'equazione deve moltiplicarsi per la serie $m(m-1)(m-2)$, $(m-1)(m-2)(m-3)$, $(m-2)(m-3)(m-4)$, ec., e generalmente per mandar via gli ultimi r termini, convien moltiplicare l'equazione per la serie

$$m(m-1)(m-2) \ldots (m-r+1)$$
$$(m-1)(m-2)(m-3) \ldots (m-r)$$
$$(m-2)(m-3)(m-4) \ldots (m-r-1)$$
ec.

Facilmente apparisce, che il coefficiente del termine Px^{m-p} sarà dopo questa moltiplicazione

$$(m-p)(m-p-1)(m-p-2) \ldots (m-p-r+1).$$

Se adesso si moltiplica l'equazione per 0, 1, 2, 3, ec., svanirà il primo termine: se di nuovo si moltiplicherà per 0, 1, 2, 3, ec., sparirà il secondo termine, e gli altri gradatamente anderanno via nel medesimo modo. Quindi per cacciar via i due primi termini, si deve moltiplicar l'equazione per 0, 0, 1.2, 2.3, 3.4, ec. per farne sparire i tre primi, convien moltiplicare per 0, 0, 0, 1.2.3, 2.3.4, 3.4.5, ec.: e generalmente per mandar via gli s primi termini, bisogna moltiplicar l'equazione per una serie, i di cui primi s termini siano 0, e gli altri i seguenti

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots\ldots s$$
$$2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \ldots\ldots (s+1)$$
$$3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \ldots\ldots (s+2)$$
ec.

e fatta questa moltiplicazione il coefficiente del termine Px^{m-p}, purchè sia $p>s-1$, sarà

$$(p-s+1)(p-s+2)(p-s+3) \ldots\ldots p\,.$$

Se dunque devono svanire tutti i termini antecedenti ad Lx^{m-p}, e tutti i posteriori a Px^{m-q}, fatta la prima moltiplicazione avremo

$$(m-p)(m-p-1)(m-p-2) \ldots\ldots (q-p+1)Lx^{m-p}$$
$$-(m-p-1)(m-p-2) \ldots\ldots (q-p)Mx^{m-p-1}$$
$$+(m-p-2)(m-p-3) \ldots\ldots (q-p-1)Nx^{m-p-2}$$
$$\vdots$$
$$\pm(m-q)(m-q-1) \ldots\ldots 2\,.\,1\,Px^{m-q}\,,$$

e fatta la seconda moltiplicazione, in cui $s=p$, avremo

$$1\,.\,2 \ldots p(m-p)(m-p-1) \ldots\ldots (q-p+1)Lx^{m-p}$$
$$-2\,.\,3 \ldots (p+1)(m-p-1)(m-p-2) \ldots\ldots (q-p)Mx^{m-p-1}$$
$$+3\,.\,4 \ldots (p+2)(m-p-2) \ldots\ldots (q-p-1)Nx^{m-p-2}$$
$$\vdots$$
$$\pm(q-p+1)(q-p+2) \ldots q\,(m-q)(m-q-1) \ldots 2\,.\,1\,Px^{m-q}.$$

Se facciamo questa quantità $=0$, ne nascerà una equazione, la quale se avrà radici imaginarie, la proposta ne avrà per lo meno altrettante.

Quindi se nella proposta mancheranno tutti i termini intermedj tra Lx^{m-p} e Px^{m-q}, essa avrà per lo meno tante radici imaginarie, quante ne ha l'equazione

$$0=1\,.\,2 \ldots p(m-p)(m-p-1) \ldots\ldots (q-p+1)Lx^{q-p}$$
$$\pm(q-p+1)(q-p+2) \ldots q(m-q)(m-q-1) \ldots\ldots 2\,.\,1\,P,$$

o sia quante ne ha l'equazione $Lx^{q-p} \pm P = 0$, giacchè non dal valore più o meno grande de' coefficienti, ma dai loro segni unicamente dipende il numero delle radici imaginarie. Infatti, se nella equazione $x^m \pm 1 = 0$ facciamo $x = \frac{Ay}{B}$, in modo che essa divenga $A^m y^m \pm B^m = 0$, tante radici imaginarie avrà questa equazione, qualunque siano le quantità reali A e B, quante ne ha l'equazione $x^m \pm 1 = 0$, poichè ad ogni valore reale o imaginario di x corrisponde un valore reale o imaginario di y.

Se vorremo eliminare tutti i termini, fuorchè i tre seguenti $Lx^{m-p} - Mx^{m-p-1} + Nx^{m-p-2}$, in tal caso sarà $q = p + 2$, ed avremo l'equazione

$$1 \,.\, 2 \ldots (m-p)(m-p-1) \ldots 3Lx^{m-p}$$
$$-2 \,.\, 3 \ldots (p+1)(m-p-1)(m-p-2) \ldots 2Mx^{m-p-1}$$
$$+3 \,.\, 4 \ldots (p+2)(m-p-2)(m-p-3) \ldots 1Nx^{m-p-2} = 0$$

o sia, dividendo per $2.3.4 \ldots p(m-p-2)(m-p-3) \ldots 3x^{m-p-2}$,

$$(m-p)(m-p-1)Lx^2 - 2(p+1)(m-p-1)Mx + (p+1)(p+2)N = 0.$$

Se L ed N hanno i medesimi segni, le radici di questa equazione saranno reali, se $\frac{(p+1)(m-p-1)}{(p+2)(m-p)} M^2 > LN$, altrimenti saranno immaginarie.

Se dunque la proposta ha tutte le sue radici reali, siccome deve averle reali anche qualunque trasformata che se ne formi, presi tre termini consecutivi $Lx^{m-p} - Mx^{m-p-1} + Nx^{m-p-2}$, de' quali i coefficienti estremi L ed N abbiano il medesimo segno, dovrà essere $\frac{(p+1)(m-p-1)}{(p+2)(m-p)} M^2 > LN$.

Da questi principj si potrebbe dedurre la regola di *Nevvton* per trovare il numero delle radici immaginarie dell' equazioni, ma siccome questa regola ed altre simili sono molto imperfette, rimanderemo i nostri leggitori per la dimostrazione di queste tra gli altri Autori, che ne trattano, al *Calcolo Differenziale* del Sig. *Euler*, e piuttosto passeremo ad esporre il celebre Teorema di *Cartesio*, dal quale si deduce il modo di distinguere tra le

Siccome adunque ogni moltiplicazione per $x-h$ o per $x+h$ ci dà almeno una variazione o una successione di più, ed in qualunque equazione tanti sono i fattori $x-h$ o $x+h$, quante le radici reali positive o negative, ne segue che in ogni equazione il numero delle radici reali positive non può esser maggiore del numero delle variazioni, nè quello delle negative maggiore del numero delle successioni. E siccome le variazioni e le successioni prese insieme eguagliano il numero delle radici di una equazione, se essa avrà tutte le radici reali, tante appunto saranno le radici positive quante le variazioni, tante le negative quante le successioni.

Per mezzo di questo teorema si può qualche volta conoscere l'esistenza delle radici immaginarie in una data equazione. Sia proposta per esempio l'equazione

$$x^3-2x^2-3x-7=0,$$

le radici della quale se fossero reali, i segni indicherebbero una radice positiva, e due negative. Moltiplicandola per $x-h$ avremo il prodotto

$$x^4-(2+h)x^3+(2h-3)x^2-(7-3h)x+7h=0,$$

nel quale i segni sarebbero alternativi, se fosse $2h>3$, e $7>3h$, alle quali condizioni si può soddisfare prendendo $h=2$. Il prodotto in tal caso ci mostrerebbe quattro radici positive, lo che siccome non combina con quello, che c'indicano i segni della proposta, ne segue che essa ha due radici immaginarie.

Sia data in secondo luogo l'equazione

$$x^4-x^3+6x^2-12x+50=0,$$

la quale non può avere alcuna radice reale negativa. Se la moltiplichiamo per $x+h$ otterremo

$$x^5+(h-1)x^4+(6-h)x^3+(6h-12)x^2+(50-12h)x+50h=0,$$

ove possiamo rendere tutti i termini positivi prendendo $h=3$; e perciò il prodotto, ed in conseguenza anche la proposta non può avere alcuna radice reale positiva. Pertanto la proposta ha tutte le radici immaginarie.

CAPITOLO X.

Dell' equazioni del terzo grado.

46.

Per incominciare dalle cose più semplici, sia proposta in primo luogo l'equazione $x^3-r=0$; ed è chiaro che una delle di lei radici è $=\sqrt[3]{r}$. Per trovare le altre dividiamo la proposta per $x-\sqrt[3]{r}$, ed otterremo l'equazione $x^2+x\sqrt[3]{r}+\sqrt[3]{r^2}=0$, la quale ci dà $x=-\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{r}$. Quindi le tre radici dell'equazione $x^3-r=0$ sono $x=\sqrt[3]{r}$, $x=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{r}$ ed $x=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{r}$.

Passiamo adesso all' equazione del terzo grado $x^3+3px+2q=0$, dalla quale è stato tolto il secondo termine. Facendo $x=m+n$ avremo $x^3=m^3+3mn(m+n)+n^3$, e sostituendo x in luogo di $m+n$ otterremo l'equazione $x^3-3mnx-m^3-n^3=0$, di cui una radice è $=m+n$. Paragoniamo questa equazione con la proposta, ed avremo per determinare m ed n l'equazioni $mn=-p$, $m^3+n^3=-2q$, la prima delle quali ci darà $n=-\frac{p}{m}$, e sostituito questo valore la seconda si cangerà in $m^3-\frac{p^3}{m^3}+2q=0$, cioè $m^6+2qm^3-p^3=0$, la quale posto $m^3=r$ diventa $r^2+2qr-p^3=0$, e ci dà $r=-q\pm\sqrt{(q^2+p^3)}$. Ora dalla equazione $m^3=r$ abbiamo $m=\sqrt[3]{r}$, ed $m=\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{r}$, e sostituendovi i valori di r ottenghiamo sei valori di m, cioè

$$m=\sqrt[3]{\left[-q\pm\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}$$
$$m=\sqrt[3]{\left[-q\pm\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$
$$m=\sqrt[3]{\left[-q\pm\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Quindi abbiamo anche sei valori di n, cioè

$$n=\frac{-p}{\sqrt[3]{\left[-q\pm\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}}=\sqrt[3]{\left[-q\mp\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}$$

$$n=\sqrt[3]{\left[-q\mp\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$n=\sqrt[3]{\left[-q\mp\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

E siccome $x=m+n$, avremo

$$x=\sqrt[3]{\left[-q\pm\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}+\sqrt[3]{\left[-q\mp\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}$$

$$x=\sqrt[3]{\left[-q\pm\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$
$$+\sqrt[3]{\left[-q\mp\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x=\sqrt[3]{\left[-q\pm\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$
$$+\sqrt[3]{\left[-q\mp\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Questi sei valori di x, poichè ciascuno è doppio, si riducono ai tre seguenti,

$$x=\sqrt[3]{\left[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}+\sqrt[3]{\left[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}\right]},$$

$$x=\sqrt[3]{\left[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$
$$+\sqrt[3]{\left[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$x=\sqrt[3]{\left[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$
$$+\sqrt[3]{\left[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$$

i quali ci danno le tre radici della proposta.

Prendiamo per esempio l'equazione $x^3+x-2=0$; sarà $p=\frac{1}{3}$, $q=-1$, e quindi $x=\sqrt[3]{\left[1+\sqrt{\left(1+\frac{1}{27}\right)}\right]}$ $+\sqrt[3]{\left[1-\sqrt{\left(1+\frac{1}{27}\right)}\right]}$, o sia $x=\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{9}\sqrt{21}\right)}$

$+\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{9}\sqrt{21}\right)}$. Ma $\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{9}\sqrt{21}\right)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{21}$, e similmente $\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{9}\sqrt{21}\right)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{21}$, come dimostreremo in seguito; è dunque $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{21}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{21}=1$. Le altre due radici saranno così espresse;

$$x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{21}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{21}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)$$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{-3.21}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-7}$, ed $x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-7}$.

Sia adesso proposta l'equazione $x^3-7x+6=0$, e sarà $p=-\frac{7}{3}$, $q=\frac{6}{2}=3$; onde $x=\sqrt[3]{\left[-3+\sqrt{\left(9-\frac{343}{27}\right)}\right]}$
$+\sqrt[3]{\left[-3-\sqrt{\left(9-\frac{343}{27}\right)}\right]}=\sqrt[3]{\left(-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}\right)}$
$+\sqrt[3]{\left(-3-\frac{10}{9}\sqrt{-3}\right)}$, la qual'espressione è involta in quantità immaginarie. L'istesso succede ogniqualvolta p è negativa, e $p^3>q^2$: ma quantunque in questo caso l'espressione della prima radice, che si suol chiamare la *formula Cardanica*, perchè *Cardano* si è molto distinto in trattarla, comparisca sotto aspetto immaginario, essa è però reale. Poichè abbiamo veduto che la quantità $\sqrt[3]{\left[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}$ nel caso di $p^3>q^2$ si riduce alla forma $A+B\sqrt{-1}$, e nel medesimo tempo $\sqrt[3]{\left[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}\right]}$ è $=A-B\sqrt{-1}$, quindi $x=A+B\sqrt{-1}$ $+A-B\sqrt{-1}=2A$, cioè reale. Di più sono nel medesimo caso reali anche le altre due radici; perchè esse sono così espresse:

$$x=(A+B\sqrt{-1})\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+(A-B\sqrt{-1})\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x=(A+B\sqrt{-1})\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+(A-B\sqrt{-1})\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

o sia fatte le moltiplicazioni $x=-A-B\sqrt{3}$, $x=-A+B\sqrt{3}$.

Questo caso, in cui tutte le radici, quantunque reali, compariscono sotto una forma immaginaria, si chiama il *caso irreducibile*, perchè ad alcuno non è finora riescito di esprimere al-

gebricamente queste radici sotto un aspetto reale. Vediamo per qual ragione il metodo usato fa giungere ad espressioni immaginarie. Sia primieramente q negativa, e l'equazione $x^3-3px-2q=0$ avrà due radici negative ed una positiva, e come manca il secondo termine, le due radici negative prese insieme saranno eguali alla positiva; io dico che nel caso irreducibile la radice positiva, e per conseguenza anche ciascuna delle negative sarà $<2\sqrt{p}$. Poichè facendo nella proposta $x=0$ abbiamo un resultato negativo $-2q$, e facendo $x=2\sqrt{p}$ abbiamo il resultato $2p\sqrt{p}-2q$ positivo a motivo di $q^2<p^3$; onde la radice positiva cade tra o e $2\sqrt{p}$. Se q è positiva, l'equazione $x^3-3px+2q=0$ ha due radici positive ed una negativa; e nell'istesso modo si dimostrerà che la radice negativa presa positivamente, e perciò anche le positive sono $<2\sqrt{p}$. Ora essendo $x=m+\frac{p}{m}$, sarà $m^2-xm+p=0$, cioè $m=\frac{x}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{x^2}{4}-p\right)}$, onde quando $x^2<4p$, o sia $\pm x<2\sqrt{p}$, il valor di m diventa immaginario. Ma nel caso irreducibile è sempre $\pm x<2\sqrt{p}$: dunque in questo caso il nostro metodo appoggiato alla supposizione $x=m+\frac{p}{m}$ deve condurci ad espressioni immaginarie.

47.

L'istesso metodo usato per l'equazione del terzo grado c' insegna a risolvere molte altre equazioni de' gradi superiori. Si abbia per esempio l'equazione $x^5+5px^3+5p^2x+2q=0$, e si ponga $x=m-\frac{p}{m}$, avremo $m^{10}+2qm^5-p^5=0$, cioè $m=\sqrt[5]{\left[-q\pm\sqrt{(q^2+p^5)}\right]}$, e quindi $x=\sqrt[5]{\left[-q+\sqrt{(q^2+p^5)}\right]}$ $+\sqrt[5]{\left[-q-\sqrt{(q^2+p^5)}\right]}$. Anche qui s'incontra un caso irreducibile; perchè se p è negativa, e $p^5>q^2$, la radice quantunque reale comparisce sotto un aspetto immaginario.

Ma cerchiamo in generale, quali equazioni ammettono una radice della forma *Cardanica*. Prendiamo l'equazione

$$x^n+Ax^{n-2}+Bx^{n-4}+Cx^{n-6}\ldots\ldots+Sx-2T=0,$$

ove n è dispari, ed i termini in posto pari eccettuato l'ultimo

sono stati omessi per maggior semplicità, perchè il calcolo seguente lì farebbe trovare $=0$, e facciamo $x=y+\frac{p}{y}$. Sostituito questo valore l'equazione proposta prenderà la forma

$$y^n+\frac{p^n}{y^n}+(np+A)\left(y^{n-2}+\frac{p^{n-2}}{y^{n-2}}\right)$$

$$+\left(\frac{n(n-1)}{2}p^2+(n-2)Ap+B\right)\left(y^{n-4}+\frac{p^{n-4}}{y^{n-4}}\right)$$

$$+\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}p^3+\frac{(n-2)(n-3)}{2}Ap^2+(n-4)Bp+C\right)\left(y^{n-6}+\frac{p^{n-6}}{y^{n-6}}\right)$$

. . . .

$$+\left(\frac{n(n-1)\ldots\frac{n+3}{2}}{2\,.\,3\ldots\frac{n-1}{2}}p^{\frac{n-1}{2}}+\frac{(n-2)\ldots\frac{n+1}{2}}{2\,.\,3\,.\,.\frac{n-3}{2}}Ap^{\frac{n-3}{2}}\ldots\ldots+S\right)\left(y+\frac{p}{y}\right)$$

$$-2T=0\,.$$

Per determinare i coefficienti A, B, C, ec. facciamo

$$np+A=0$$

$$\frac{n(n-1)}{2}p^2+(n-2)Ap+B=0$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}p^3+\frac{(n-2)(n-3)}{2}Ap^2+(n-4)Bp+C=0$$

ec.

In questa maniera svanendo tutti i termini intermedj avremo.

$y^n+\frac{p^n}{y^n}-2T=0$, o sia $y^{2n}-2Ty^n+p^n=0$, cioè

$y=\sqrt[n]{\left[T\pm\sqrt{(T^2-p^n)}\right]}$, e quindi $x=\sqrt[n]{\left[T+\sqrt{(T^2-p^n)}\right]}$

$+\frac{p}{\sqrt[n]{\left[T+\sqrt{(T^2-p^n)}\right]}}=\sqrt[n]{\left[T+\sqrt{(T^2-p^n)}\right]}$

$+\sqrt[n]{\left[T-\sqrt{(T^2-p^n)}\right]}$; e questa sarà la radice della proposta; purchè sia

$$A = -np$$

$$B = n(n-2)p^2 - \frac{n(n-1)}{2}p^2 = \frac{n(n-3)}{2}p^2$$

$$C = -\frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}p^3$$

$$D = \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4}p^4 .$$

ec.

Pertanto in qualunque grado dispari si potrà assegnare una equazione, che abbia una radice della forma *Cardanica*.

Anche nel caso di n pari si danno in tutti i gradi dell'equazioni, che ammettono una radice della forma *Cardanica*, quantunque un poco diversa dalla precedente. Per trovar quest'equazioni sia n pari, e prendiamo l'equazione

$$x^n + Ax^{n-2} + Bx^{n-4} + Cx^{n-6} \ldots\ldots + Sx^2 - 2T = 0$$

e facendo $x = y + \frac{p}{y}$ avremo

$$y^n + \frac{p^n}{y^n} + (np+A)\left(y^{n-2} + \frac{p^{n-2}}{y^{n-2}}\right)$$

$$+ \left(\frac{n(n-1)}{2}p^2 + (n-2)Ap + B\right)\left(y^{n-4} + \frac{p^{n-4}}{y^{n-4}}\right)$$

$$+ \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}p^3 + \frac{(n-2)(n-3)}{2}Ap^2 + (n-4)Bp + C\right)\left(y^{n-6} + \frac{p^{n-6}}{y^{n-6}}\right)$$

. . . .

$$+ \left(\frac{n(n-1)\ldots\frac{n+4}{2}}{2.3\ldots\frac{n-2}{2}}p^{\frac{n-2}{2}} + \frac{(n-2)\ldots\frac{n+2}{2}}{2.3\ldots\frac{n-4}{2}}Ap^{\frac{n-4}{2}} \ldots + S\right)\left(y^2 + \frac{p^2}{y^2}\right)$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots\frac{n+2}{2}}{2.3\ldots\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}} + \frac{(n-2)\ldots\frac{n}{2}}{2.3\ldots\frac{n-2}{2}}Ap^{\frac{n-2}{2}} \ldots + 2Sp + V$$

$$-2T - V = 0 ,$$

ove ho aggiunta e sottratta la quantità V per fare svanire tutti i termini intermedj. Per ottener ciò dovremo fare come sopra

$$A=-np$$
$$B=\frac{n(n-3)}{2}p^2$$
$$C=-\frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}p^3$$

e finalmente

$$V=\pm\frac{n\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\ldots\ldots 1}{2.3\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}}=\pm 2p^{\frac{n}{2}}$$

ove il segno $+$ si deve prendere se $\frac{n}{2}$ è pari, e il segno $-$ se $\frac{n}{2}$ è dispari. Sostituiti questi valori l'equazione precedente diventerà $y^n+\frac{p^n}{y^n}-2T\mp 2p^{\frac{n}{2}}=0$, o sia $y^{2n}-2\left(T\pm p^{\frac{n}{2}}\right)y^n+p^n=0$, e quindi $y=\sqrt[n]{\left[T\pm p^{\frac{n}{2}}+\sqrt{\left(T^2\pm 2Tp^{\frac{n}{2}}\right)}\right]}$, ed $x=y+\frac{p}{y}$, cioè

$$x=\sqrt[n]{\left[T\pm p^{\frac{n}{2}}+\sqrt{\left(T^2\pm 2Tp^{\frac{n}{2}}\right)}\right]}$$
$$+\sqrt[n]{\left[T\pm p^{\frac{n}{2}}-\sqrt{\left(T^2\pm 2Tp^{\frac{n}{2}}\right)}\right]}.$$

CAPITOLO XI.

Dell' equazioni del quarto grado.

48.

Sia data l'equazione del quarto grado priva del secondo termine

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

e siccome ogni equazione è composta di fattori reali del secon-

do grado, supponghiamo che essa si risolva nelle due equazioni $x^2+ex+f=0$, $x^2-ex+g=0$. Fatta la moltiplicazione avremo l'equazione

$$\begin{array}{l} x^4+fx^2+egx+fg=0, \\ \quad\;\; +g \quad -ef \\ \quad\;\; -e^2 \end{array}$$

la quale paragonata con la proposta ci dà $f+g-e^2=p$, $eg-ef=q$, $fg=r$. Quindi ricaviamo $2g=p+e^2+\frac{q}{e}$, $2f=p+e^2-\frac{q}{e}$, e $p^2+2e^2p+e^4-\frac{q^2}{e^2}=4fg=4r$; onde finalmente abbiamo l'equazione

$$e^6+2pe^4+(p^2-4r)e^2-q^2=0,$$

la quale posto $e^2=m$ diventa

$$(B) \quad m^3+2pm^2+(p^2-4r)m-q^2=0.$$

Ora questa equazione avendo necessariamente l'ultimo termine negativo, avrà una radice positiva, la quale posta $=4l^2$ ci darà $e=2l$. Ma l'equazioni $x^2+ex+f=0$, $x^2-ex+g=0$ danno quattro valori di x, cioè $x=\frac{-e+\sqrt{(e^2-4f)}}{2}$, $x=\frac{-e-\sqrt{(e^2-4f)}}{2}$, $x=\frac{e+\sqrt{(e^2-4g)}}{2}$, $x=\frac{e-\sqrt{(e^2-4g)}}{2}$ o sia sostituiti i valori di e, f, g,

$$x=-l+\frac{\sqrt{(ql-2pl^2-4l^4)}}{2l}, \quad x=-l-\frac{\sqrt{(ql-2pl^2-4l^4)}}{2l}$$

$$x=l+\frac{\sqrt{(-ql-2pl^2-4l^4)}}{2l}, \quad x=l-\frac{\sqrt{(-ql-2pl^2-4l^4)}}{2l};$$

queste adunque sono le quattro radici della proposta.

Siano $4k^2$, $4h^2$ le altre radici dell'equazione (B), ed avremo (36) $-2p=4l^2+4k^2+4h^2$, e $q^2=4l^2.4k^2.4h^2$, cioè $q=8lkh$. Se sostituiamo questi valori nella prima espressione di x, avremo

$$x=-l+\frac{\sqrt{(8l^2kh+4l^4+4l^2k^2+4l^2h^2-4l^4)}}{2l}$$

$$=-l+\frac{2l\sqrt{(2kh+k^2+h^2)}}{2l}=-l+k+h.$$

Gli altri valori di x si troveranno così espressi: $x=-l-k-h$, $x=l+k-h$, $x=l+h-k$. Quindi apparisce, che se in luogo di

$4l^2$ prendiamo qualunque altra radice dell'equazione (B), i valori di x riescono i medesimi; poichè se prendiamo $e=2k$, avremo $x=-k+l+h$, $x=-k-l-h$, $x=k+l-h$, $x=k+h-l$, che sono i medesimi valori di sopra: lo stesso si deve dire dell'altra radice $4h^2$. È inoltre evidente che, se le tre radici dell'equazione (B) sono reali e positive, le radici della proposta sono tutte reali. Siccome poi l'equazione (B) non può avere tutte le sue radici positive, se non ha i segni de' termini alternativamente positivi e negativi; quindi se non sarà p negativa, e $p^2>4r$, la proposta non potrà avere tutte le sue radici reali.

Non siano adesso tutte positive le radici dell'equazione (B), ma alcuna di esse sia negativa; e siccome q^2 è necessariamente positivo, bisognerà che le radici negative siano due. Se facciamo queste due radici negative $=-4a^2$, e $-4c^2$, sarà $4k^2=-4a^2$, $4h^2=-4c^2$, cioè $k=a\sqrt{-1}$, $h=c\sqrt{-1}$; onde avremo $x=-l+(a+c)\sqrt{-1}$, $x=-l-(a+c)\sqrt{-1}$, $x=l+(a-c)\sqrt{-1}$, $x=l-(a-c)\sqrt{-1}$. Se adunque l'equazione (B) ha due radici reali negative, le radici della proposta saranno tutte immaginarie.

Finalmente due radici dell'equazione (B) siano immaginarie, cioè $4(A^2-B^2+2AB\sqrt{-1})$, e $4(A^2-B^2-2AB\sqrt{-1})$; sarà $k=A+B\sqrt{-1}$, $h=A-B\sqrt{-1}$, e quindi $x=-l+2A$, $x=-l-2A$, $x=l+2B\sqrt{-1}$, $x=l-2B\sqrt{-1}$, cioè la proposta avrà due radici reali e due immaginarie. Illustriamo tutti questi casi con qualch' esempio.

I. Sia data l' equazione $x^4-25x^2+60x-36=0$, ove $p=-25$, $q=60$, $r=-36$, e l'equazione (B) sarà $m^3-50m^2+769m-3600=0$, le di cui radici sono tutte reali, e positive, cioè 9, 16, 25. Sarà dunque $l=\frac{3}{2}$, $k=2$, $h=\frac{5}{2}$, e perciò $x=-l+h+k=3$, $x=-l-h-k=-6$, $x=l+h-k=2$, $x=l+k-h=1$, che sono le radici della proposta.

II. Si abbia l'equazione $x^4+3x^2-6x+10=0$, e l'equazione (B) sarà $m^3+6m^2-31m-36=0$, le di cui radici sono 4, -1, -9, Quindi $l=1$, $a=\frac{1}{2}$, $c=\frac{3}{2}$, e perciò
$x=-l+(a+c)\sqrt{-1}=-1+2\sqrt{-1}$, $x=-l-(a+c)\sqrt{-1}=-1-2\sqrt{-1}$,
$x=l+(c-a)\sqrt{-1}=1+\sqrt{-1}$, $x=l+(a-c)\sqrt{-1}=1-\sqrt{-1}$.

III. Sia finalmente proposta l'equazione $x^4-2x^2+16x-15=0$, ed avremo $m^3-4m^2+64m-256=0$, che ha per radici 4, $8\sqrt{-1}$, $-8\sqrt{-1}$. Quindi $l=1$, $4(A^2-B^2)=0$, $8AB\sqrt{-1}=8\sqrt{-1}$, cioè

$A=B=1$, e perciò $x=-l+2A=1$, $x=-l-2A=-3$, $x=l+2B\sqrt{-1}=1+2\sqrt{-1}$, $x=l-2B\sqrt{-1}=1-2\sqrt{-1}$.

Fino a questo punto sono giunti i Geometri nella ricerca della generale risoluzione dell'equazioni. Non si conosce finora alcun metodo, che insegni ad esprimere generalmente le radici dell'equazioni del quinto grado o de' gradi superiori. La brevità che ci siamo proposta non ci permette di entrare nell'esame de' diversi metodi, che sono stati tentati per la risoluzione dell'equazioni. Per istruirsi pienamente in questa materia convien leggere l'eccellenti *Riflessioni sulla risoluzione algebrica dell'equazioni* del Sig. *de la Grange* pubblicate nelle *Memorie dell'Accademia di Berlino* degli anni 1770, e 1771.

CAPITOLO XII.

Dell'eliminazione dell'incognite dall'equazioni de' gradi superiori.

49.

Parlando dell'equazioni del primo grado abbiamo veduto spesso accadere, che qualche problema dipende in modo da più incognite, che di tutte convien trovare il valore per ben risolverlo. Abbiamo quivi dimostrato, che il valore di tutte le incognite, e perciò la risoluzione del problema si può sempre ottenere, quando tante sono l'equazioni quante l'incognite. Lo stesso mostreremo che succede per rapporto all'equazioni de' gradi superiori trattando dell'eliminazione dell'incognite. Siano date pertanto le due equazioni

$$y^m+Ay^{m-1}+By^{m-2}+Cy^{m-3}\ldots+T=0,$$
$$y^n+A'y^{n-1}+B'y^{n-2}+C'y^{n-3}\ldots+T'=0,$$

ove i coefficienti A, B, C, ec. A', B', C', ec. contengono quantità cognite ed un'altra incognita x, e siano a, b, c, d, ec. le radici della prima equazione, o sia gli m valori di y espressi per x e quantità cognite, che ci darebbe la risoluzione della prima equazione. Siccome le due proposte equazioni devono sussistere insieme, cioè i valori di y della prima devono essere eguali a quei della seconda, se sostituiamo nella seconda in

luogo di y le quantità a, b, c, d, ec., avranno luogo tutte le m equazioni

$$a^n+A'a^{n-1}+B'a^{n-2}+C'a^{n-3}\ldots+T'=0,$$
$$(M)\ b^n+A'b^{n-1}+B'b^{n-2}+C'b^{n-3}\ldots+T'=0,$$
$$c^n+A'c^{n-1}+B'c^{n-2}+C'c^{n-3}\ldots+T'=0,$$
ec.

e le radici di esse ci daranno tutti i valori di x, i quali fanno insieme sussistere le due proposte equazioni. Ma l'equazione nata dall'eliminazione di y deve contenere tutti i valori di x, che rendono l'istesso nelle due equazioni il valore di y. Dunque l'equazione nata dall'eliminazione sarà il prodotto di tutte l'equazioni (M). Pare a prima vista che per eseguire l'eliminazione sia necessario di conoscere le radici a, b, c, d, ec. della prima equazione, ma se riflettiamo che nell'equazioni (M) entrano egualmente tutte queste radici, facilmente vedremo che il prodotto dell'equazioni (M) sarà composto di termini, i quali (37, e 38) si potranno esprimere per i coefficienti A, B, ec. della prima equazione.

Prendiamo per esempio ad eliminare y dalle due equazioni del secondo grado

$$y^2+Ay+B=0$$
$$y^2+A'y+B'=0.$$

Sostituendo nella seconda equazione le radici a e b della prima avremo l'equazioni

$$a^2+A'a+B'=0.$$
$$b^2+A'b+B'=0,$$

e moltiplicandole insieme l'equazione
$a^2b^2+A'(ab^2+a^2b)+B'(a^2+b^2)+A'^2ab+A'B'(a+b)+B'^2=0$. Ma
$a+b=-A$, $ab=B$, $a^2+b^2=A^2-2B$, $ab^2+a^2b=-AB$, $a^2b^2=B^2$; dunque sostituiti questi valori l'equazione che nasce dall'eliminazione di y sarà

$$B^2-AA'B+A^2B'-2BB'+A'^2B-AA'B'+B'^2=0.$$

Daremo in seguito un metodo più facile per eseguire l'eliminazione, ma intanto dimostreremo il teorema seguente. Se l'equazioni proposte son tali, che le quantità A ed A' siano formule in x del primo grado, B e B' del secondo, C e C' del terzo, e così in seguito, in modo che la somma dell'esponente

di y e del massimo di x sia in ciascun termine della prima equazione $=m$, ed in ciascuno della seconda $=n$, l'equazione, che nasce dall'eliminazione di y, sarà del grado mn. Per dimostrar ciò si osservi, che in ciascun termine dell'equazioni (M) l'esponente della potestà di una radice insieme col grado del coefficiente di questa potestà è $=n$. Quindi nel prodotto di tutte l'equazioni (M), che sono m di numero, ciascun termine nascerà dalla moltiplicazione di m termini delle medesime equazioni, e la di lui forma $QP^{(r,\, r',\, r'',\, \text{ec.})}$ sarà tale, che chiamato q il grado del coefficiente Q sarà $q+r+r'+r''+\text{ec.}=mn$. Ma se consideriamo il modo (37 e 38), con cui le quantità $P^{(r,r',r'',\text{ec.})}$ si determinano per i coefficienti A, B, ec., facilmente vedremo che la quantità $P^{(r,\, r',\, r'',\text{ec.})}$ è del grado $r+r'+r''+$ ec. Quindi ciascun termine dell'equazione nata dall'eliminazione, e perciò l'equazione stessa è del grado mn.

Siccome le due equazioni proposte per l'eliminazione devono sussistere insieme, convien che abbiano un divisore comune. Si applichi adunque ad esse il metodo che si usa per la ricerca del massimo comun divisore, e si giungerà in fine ad un residuo che non conterrà più y. Questo residuo dovrà essere $=0$, perchè le proposte abbiano un fattore comune, e sarà l'equazione stessa che nasce dall'eliminazione di y. È stato osservato, che questo metodo conduce spesso ad equazioni di un grado più alto del giusto per i fattori inutili, che le diverse operazioni v'introducono; perciò noi proporremo il seguente metodo, il quale al pregio della facilità unisce quello di condurre ad equazioni del giusto grado. E perchè la via da tenersi più chiaramente apparisca, incominciamo dall'equazioni del secondo grado, per passare in seguito alle altre.

Siano adunque date le due equazioni del secondo grado

$$Ay^2+By+C=0,$$
$$A'y^2+B'y+C'=0,$$

e cerchiamo un'altra equazione, in cui manchi la y. Dalla prima delle proposte moltiplicata per A' si sottragga la seconda moltiplicata per A, e ne verrà l'equazione

$$(1)\quad (A'B-AB')y+A'C-AC'=0.$$

Ora dalla prima moltiplicata per $A'y+B'$ si sottragga la seconda moltiplicata per $Ay+B$, e ne nascerà

$$(2)\quad (A'C-AC')y+B'C-BC'=0.$$

Per mezzo dell'equazioni (1) e (2) si elimini y, e si otterrà l'equazione cercata

$$(A'C-AC')^2-(A'B-AB')(B'C-BC')=0,$$

ove manca la y.

Si abbiano adesso le due equazioni del terzo grado

$$Ay^3+By^2+Cy+D=0,$$
$$A'y^3+B'y^2+C'y+D'=0.$$

Dalla prima moltiplicata per A' si sottragga la seconda moltiplicata per A, e ne risulterà

$$(1)\quad (A'B-AB')y^2+(A'C-AC')y+A'D-AD'=0.$$

Dalla prima moltiplicata per $A'y+B'$ si sottragga la seconda moltiplicata per $Ay+B$, e si avrà

$$(2)\quad (A'C-AC')y^2+(A'D-AD'+B'C-BC')y+B'D-BD'=0.$$

Finalmente dalla prima moltiplicata per $A'y^2+B'y+C'$ si sottragga la seconda moltiplicata per Ay^2+By+C, e ne verrà

$$(3)\quad (A'D-AD')y^2+(B'D-BD')y+C'D-CD'=0.$$

Ora per mezzo dell'equazioni (1), (2), e (3) eliminiamo y ed y^2, considerandole come due diverse incognite, nel modo seguente. Dall'equazioni (1) e (3) abbiamo

$$-y^2=\frac{A'C-AC'}{A'B-AB'}y+\frac{A'D-AD'}{A'B-AB'}=\frac{B'D-BD'}{A'D-AD'}y+\frac{C'D-CD'}{A'D-AD'},$$ e quindi

$$y=\frac{(A'D-AD')^2-(A'B-AB')(C'D-CD')}{(A'B-AB')(B'D-BD')-(A'C-AC')(A'D-AD')},$$ ed

$$y^2=\frac{(A'C-AC')(C'D-CD')-(A'D-AD')(B'D-BD')}{(A'B-AB')(B'D-BD')-(A'C-AC')(A'D-AD')},$$

sostituiti i quali valori nell'equazione (2), e tolte le frazioni avremo

$$(A'C-AC')^2(C'D-CD')-2(A'C-AC')(A'D-AD')(B'D-BD')$$
$$+[(A'D-AD')^2-(A'B-AB')(C'D-CD')](A'D-AD'+B'C-BC')$$
$$+(A'B-AB')(B'D-BD')^2=0.$$

Da quello che abbiamo detto si vede già abbastanza ciò che deve farsi per eliminare y dall'equazioni di qualunque grado. Questo metodo, che è il migliore di quanti ne sono stati finora immaginati, si deve al Sig. *Bézout*. Chi ne desiderasse un più lungo dettaglio, consulti le *Memorie dell' Accademia delle Scienze di Parigi* dell'anno 1764. Abbiamo supposto nell'equazioni trattate il medesimo grado; se lo avranno diverso, quella

del grado più alto si potrà facilmente abbassare all'inferiore. Per darne un esempio sia proposto di eliminare y dalle due seguenti equazioni, una del quarto, e l'altra del secondo grado,

$$A'y^4+B'y^3+C'y^2+D'y+E'=0,$$
$$Ay^2+By+C=0.$$

Si prenda dalla seconda il valore di y^2, e sarà $y^2=\frac{-By-C}{A}$, e quindi $y^3=\frac{-By^2-Cy}{A}$, $y^4=\frac{-By^3-Cy^2}{A}$, cioè sostituendovi il valore di y^3, $y^4=\frac{(B^2-AC)y^2+BCy}{A^2}$, i quali valori di y^3 ed y^4 sostituiti nella prima equazione ci daranno

$$[A'(B^2-AC)-ABB'+A^2C']y^2+(A'BC-AB'C+A^2D')y+A^2E'=0.$$

Questa equazione e la seconda delle date essendo adesso del medesimo grado, si potrà da esse eliminare la y col metodo precedente.

Se avremo tre equazioni, e tre incognite x, y, z, dalla prima e dalla seconda elimineremo z, ed avremo una equazione tra x ed y; un'altra simile ne troveremo eliminando z dalla prima equazione e dalla terza, oppure dalla seconda e dalla terza. Trovate due equazioni tra x ed y, se col loro mezzo elimineremo una dell'incognite, il valore dell'altra ci sarà dato dall'equazione risultante. E l'istessa maniera di operare tener si deve, allorchè son date più equazioni e più incognite. Ma è stato osservato, che l'equazione finale trovata in tal guisa ascende ad un grado maggiore del giusto. Perciò un altro metodo di eliminazione ha immaginato il Sig. *Bézout*, che può vedersi nelle *Memorie* citate. Ma qualunque metodo si adopri, quando il grado ed il numero dell'equazioni va crescendo, il calcolo necessario per l'eliminazione diviene oltremodo complicato, se la natura del problema non somministra qualche particolare artifizio, che ne abbrevj la fatica. Quello, che deve avvertirsi, si è, che il calcolo in qualunque modo può sempre riescire: onde si può concludere, che allorquando il numero dell'equazioni è eguale a quello delle incognite, queste hanno ciascuna un valore fisso e determinato.

50.

Ora brevemente vediamo, come si possano da qualunque

equazione eliminare le quantità radicali . Data per esempio l' equazione

$$2\sqrt{ay}=\sqrt[3]{ay^2-b},$$

ponghiamo $\sqrt{ay}=x$, $\sqrt[3]{ay^2}=z$, ed avremo (1) $2x=z-b$, (2) $ay=x^2$, (3) $ay^2=z^3$. Eliminiamo adesso col mezzo dell'equazioni (1), (2), e (3) le incognite x e z, ed avremo una equazione in y priva affatto di radicali nel modo seguente. Sostituiamo nella equazione (3) il valore di z preso dalla equazione (1), ed avremo $ay^2=8x^3+12bx^2+6b^2x+b^3$, e ponendo in questa il valore di $x^2=ay$ ricavato dall'equazione (2) otterremo $ay^2=8axy+12aby+6b^2x+b^3$, e quindi $x=\frac{ay^2-12aby-b^3}{8ay+6b^2}$: sostituendo questo valore di x nella equazione (2) avremo finalmente l'equazione in y senza radicali

$$ay(8ay+6b^2)^2=(ay^2-12aby-b^3)^2 .$$

Ciascun vede, che questo metodo si estende a tutti i casi.

CAPITOLO XIII.

Del modo di trovare i fattori razionali dell' equazioni.

51.

Quantunque non si possa ottenere la risoluzione generale dell' equazioni di un grado più elevato del quarto, se però una equazione di qualunque grado avrà radici razionali, queste si potranno sempre facilmente trovare. Poichè essendo l'ultimo termine T dell' equazione

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\ldots+Sx+T=0,$$

ove tutti i coefficienti son numeri interi, eguale al prodotto di tutte le radici, la radice intera sarà compresa tra i divisori dell'ultimo termine; nè può succedere che questa equazione abbia una radice razionale fratta . Suppongbiamo infatti che una di lei radice sia $\frac{a}{b}$, essendo questa frazione ridotta ai minimi termini, e sostituendo avremo

$$\frac{a^m}{b^m}+A\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}}+B\frac{a^{m-2}}{b^{m-2}}\ldots\ldots+S\frac{a}{b}+T=0\,,$$

e quindi $\frac{a^m}{b^m}=-\frac{Aa^{m-1}+Ba^{m-2}b\ldots\ldots+Sab^{m-2}+Tb^{m-1}}{b^{m-1}}$.

Ora essendo $A, B, \ldots\ldots S, T, a, b$ numeri interi, anche il numeratore del secondo membro di questa equazione sarà un numero intero, il quale se chiamiamo p, avremo $\frac{a^m}{b^m}=\frac{p}{b^{m-1}}$ cioè $\frac{a^m}{b}=p$; lo che è impossibile: poichè essendo $\frac{a}{b}$ una frazione ridotta ai minimi termini, anche $\frac{a^m}{b}$ sarà tale, nè potrà mai essere eguale al numero intero p. Quindi una equazione, che abbia tutti i suoi termini interi, ed il coefficiente del primo eguale all' unità, non può aver mai per radice una frazione razionale.

Quando adunque vogliamo cercare le radici razionali, dobbiamo primieramente liberare dalle frazioni l'equazione proposta; lo che faremo ponendo $x=\frac{y}{q}$, e $q=$ al prodotto di tutti i denominatori diversi de' di lei termini. Poi prendendo tanto positivamente che negativamente i divisori dell'ultimo termine, dobbiamo sostituirli in luogo di y nella equazione data; e se alcuno di essi vi soddisfarà, sarà una radice dell'equazione, se non si troverà alcuno che vi soddisfaccia, potremo esser certi che l'equazione data è priva di radici razionali.

Si abbia per esempio l'equazione del terzo grado nel caso *irreducibile* $x^3-7x+6=0$: i divisori dell'ultimo termine sono $1, 2, 3, 6$, de' quali tre soddisfanno alla proposta, cioè $1, 2, -3$, e sono perciò le di lei radici.

Quando l'ultimo termine della proposta ha pochi divisori, le radici razionali si trovano speditamente: ma se l'ultimo termine ha molti divisori, si rende necessario l'aver qualche rego-

la, che insegni subito a rigettare i divisori inutili, ed a ritener quei soli, che possono soddisfare alla proposta. Abbia l'equazione data una radice razionale a, e sia perciò della forma $(x-a)P=0$, e il numero a si troverà tra i divisori dell'ultimo termine. Adesso posto $y+1$ in luogo di x l'equazione diventerà $(y-a+1)P'=0$, e questa avrà la radice $a-1$, che sarà compresa tra i divisori dell'ultimo termine, il quale si otterrà ponendo nel primo membro della proposta $x=1$ (39). Similmente se facciamo $x=z-1$, una radice dell'equazione che ne risulta sarà $=a+1$, e sarà uno dei divisori del numero in cui si cangia la proposta facendovi $x=-1$. Di qui discende la regola che insegna a riconoscere i divisori inutili: posto nel primo membro della proposta $x=1, 0, -1$, ne vengano i numeri Q, Q', Q'', e sia a un divisore del numero Q'; acciò questo numero sia una radice della proposta, bisogna che tra i divisori di Q si trovi il numero $a-1$, ed il numero $a+1$ tra i divisori di Q''. Se queste due condizioni non hanno luogo, il divisore a si deve rigettare come inutile; tutti i divisori poi si devono prendere a considerare tanto positivi che negativi. Venghiamo agli esempj.

I. Si abbia in primo luogo l'equazione $x^4-14x^3+71x^2-154x+120=0$. Facendo $x=1, 0, -1$, avremo $Q=24$, $Q'=120$, $Q''=360$, i divisori de' quali numeri sono quei che seguono.

$Q=24$ | 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
$Q'=120$ | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.
$Q''=360$ | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

Adesso tra i divisori di Q' rigetto l'unità, perchè in Q non vi è 0; ritengo il 2, perchè in Q vi è 1, e 3 in Q''; così pure ritengo i numeri 3, 4, 5, perchè in Q vi sono i numeri 2, 3, 4, ed i numeri 4, 5, 6 in Q'', e rigetto tutti gli altri. Prendendo poi i divisori negativamente, e rigettato -1, ammetto -2, e -3, perchè in Q si trova -3 e -4, ed in Q'' s'incontra -1 e -2. Rigetto -4, perchè in Q non si trova -5; e nell'istesso modo ammettendo -5 rigetto tutti gli altri. I divisori da tentarsi sono dunque i numeri 2, 3, 4, 5, -2, -3, -5, tra i quali i negativi non soddisfanno alla proposta, i positivi poi tutti vi soddisfanno, e sono perciò le di lei radici.

II. Si prenda l'equazione $x^3-3x+14=0$, e sarà $Q=12$, $Q'=14$, $Q''=16$, de' quali numeri i divisori sono i seguenti:

$$\begin{matrix} 12 \\ 14 \\ 16 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12. \\ 1,\ 2,\ 7,\ 14. \\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16. \end{matrix}\right.$$

Due soli divisori del 14 cioè 7 e -2 godono delle necessarie condizioni; sostituiti però nell'equazione non vi soddisfanno, ond'essa non ha alcuna radice razionale.

52.

Quantunque però una data equazione abbia tutte le radici irrazionali, può succedere che ammetta divisori razionali del secondo grado, del terzo, ec. Rappresenti $x^2+mx+n=0$ un divisore razionale del secondo grado, e per esso si divida la proposta: si giungerà ad un residuo della forma $Mx+N$, il quale dovrà andare a zero indipendentemente dal valore di x, perchè la divisione si faccia esattamente. Avremo perciò le due equazioni $M=0$, $N=0$ date per m, ed n, e se da queste elimineremo n otterremo una equazione in m. Si cerchino le radici razionali di questa equazione, e se prese per m ci daranno un valore razionale anche per n, ne risulteranno altrettanti fattori razionali della proposta.

Sia data per esempio l'equazione $x^4-3x^2+10x-6=0$, della quale si debbano cercare i divisori razionali del secondo grado. Si divida il primo membro della proposta per x^2+mx+n, e si giungerà al residuo $(10+2mn-m^3+3m)x+n^2-m^2n+3n-6$. Quindi avremo le due equazioni

$$m^3-2mn-3m-10=0,$$
$$n^2-m^2n+3n-6=0,$$

ed eliminando n l'equazione

$$m^6-6m^4+33m^2-100=0.$$

Le radici razionali di questa sono 2 e -2, i quali valori sostituiti nell'equazione $m^3-2mn-3m-10=0$ ci danno $n=-2$, ed $n=3$. Dunque la proposta ha i due divisori razionali $x^2+2x-2=0$, $x^2-2x+3=0$.

Dalle cose precedenti facilmente si comprende, qual metodo usar si debba per trovare i divisori razionali del terzo grado, o de'gradi superiori.

53.

Di sopra (34) abbiamo dato il metodo per trovar la radice quadrata del binomio $a+\sqrt{b}$; passiamo adesso alla ricerca della radice qualunque di questo binomio, allorchè è possibile. Sia primieramente m un numero dispari, e la radice m.esima del binomio $a+\sqrt{b}$ sarà, quando è possibile, della forma $(x+\sqrt{y})\sqrt[m]{k}$, poichè qualunque altra forma si assuma, inalzata alla potenza m conterrà più di un radicale, e perciò non potrà essere eguale alla quantità $a+\sqrt{b}$. Sia dunque $\sqrt[m]{(a+\sqrt{b})}=(x+\sqrt{y})\sqrt[m]{k}$, ed elevando questa equazione alla potenza m avremo

$$a+\sqrt{b}=k\left(x^m+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}x^{m-4}y^2+\text{ec.}\right)$$
$$+k\sqrt{y}\left(mx^{m-1}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}y+\text{ec.}\right).$$

Ma siccome devono essere eguali tra loro separatamente le quantità razionali e le irrazionali, avremo

$$(1)\quad a=k\left(x^m+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y+\text{ec.}\right)$$
$$(2)\quad \sqrt{b}=k\sqrt{y}\left(mx^{m-1}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}y+\text{ec.}\right).$$

Quindi apparisce, che sarà ancora $\sqrt[m]{(a-\sqrt{b})}=(x-\sqrt{y})\sqrt[m]{k}$, perchè da questa elevata alla potenza m si ricavano le medesime equazioni (1), e (2). Si moltiplichino tra loro le due radici $\sqrt[m]{(a+\sqrt{b})}$, $\sqrt[m]{(a-\sqrt{b})}$, e si otterrà $\sqrt[m]{\frac{a^2-b}{k^2}}=x^2-y$, onde acciò la quantità x^2-y sia razionale, cioè affinchè $a+\sqrt{b}$ abbia una radice della forma $(x+\sqrt{y})\sqrt[m]{k}$, conviene che $\frac{a^2-b}{k^2}$ sia una potenza m.esima. Si prenda adunque k in modo, che soddisfaccia a questa condizione, ed è sempre possibile di avere un tal valore di k, perchè se non se ne trovano altri, si può prendere $k=(a^2-b)^{\frac{\pm m+1}{2}}$. Fatto ciò sia $\frac{a^2-b}{k^2}=c^m$, ed avremo

$y = x^2 - c$, e sostituito questo valore l'equazione (1) diventerà

$$(3)\quad a = k\left(x^m + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}(x^2-c) + \text{ec.}\right),$$

e le radici razionali di questa equazione, se ne ha, ci daranno il valore di x; onde poi si dedurrà quello di $y = x^2 - c$, e quindi la radice cercata $(x \pm \sqrt{y})\sqrt[m]{k}$. Inalzando questa radice alla potenza m, e paragonandola con la proposta $a + \sqrt{b}$ vedremo quale de' due segni + o — si debba prendere.

Si debba per esempio estrarre la radice cubica dal binomio $1 + \frac{2}{9}\sqrt{21}$: avremo $a = 1$, $\sqrt{b} = \frac{2}{9}\sqrt{21}$, e $b = \frac{28}{27}$, e quindi $\frac{a^2 - b}{k^2} = -\frac{1}{27k^2}$, che sarà un cubo se si prende $k = 1$, e perciò $c = -\frac{1}{3}$. Sostituiti questi valori l'equazione (3) diventerà $4x^3 + x - 1 = 0$, la quale ha una radice razionale $= \frac{1}{2}$. Sarà dunque $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} = \frac{21}{36}$, e la radice cercata $= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{21}$.

Sia proposto in secondo luogo di estrarre la radice cubica dal binomio immaginario $-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}$. Avremo $a = -3$, $b = -\frac{100}{27}$, $\frac{a^2 - b}{k^2} = \frac{343}{27k^2} = \frac{7^3}{3^3}$ ponendo $k = 1$, e perciò $c = \frac{7}{3}$. Ora l'equazione (3) diventa $4x^3 - 7x + 3 = 0$, le di cui radici sono $\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{3}{2}$; i valori di y saranno perciò $-\frac{25}{12}$, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{12}$, ed il binomio proposto avrà le tre radici cubiche $\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\sqrt{-3}$, $1 + \frac{2}{3}\sqrt{-3}$, $-\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{-3}$.

Sia adesso m pari $= 2n$, e potremo supporre $\sqrt[2n]{(a + \sqrt{b})} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})\sqrt[2n]{k}$, poichè elevando questa quantità alla potenza $2n$, essa non conterrà che un solo radicale $\sqrt{xy}$, e l'equazione (1) sarà in questo caso

$$(4)\quad a = k\left(x^n + \frac{2n(2n-1)}{2}x^{n-1}y + \text{ec.}\right).$$

Dovrà dunque essere $\sqrt[2n]{\frac{a^2-b}{k^2}}=x-y$, e quindi acciò x ed y siano razionali, converrà che sia la quantità $\frac{a^2-b}{k^2}$ una potenza $2n.^{esima}$; onde una condizione necessaria si è, che a^2-b sia un quadrato, perchè tanto k^2 che la frazione $\frac{a^2-b}{k^2}$ è un quadrato. Posto ciò si cerchi per k un numero tale, che $\frac{a^2-b}{k^2}$ diventi una potenza c^{2n}; e ciò sarà sempre possibile, perchè si può prendere $k=\sqrt{(a^2-b)}$, e $k=\sqrt{(a^2-b)}^{\pm n+1}$, se non si trovano altri valori di k più piccoli di questi. Adesso avremo $y=x-c$, e sostituendo questo valore nella equazione (4) otterremo l'equazione

$$(5) \quad a=k\left(x^n+\frac{2n(2n-1)}{2}x^{n-1}(x-c)+\text{ec.}\right),$$

le radici razionali della quale ci daranno i valori cercati di x.

Si voglia per esempio la radice quarta del binomio $14+8\sqrt{3}$; avremo $a=14$, $b=192$, e $a^2-b=4$, che è un quadrato. Per rendere $\frac{a^2-b}{k^2}$ una quarta potenza prendiamo $k=\frac{1}{2}$, ed avremo $c=2$, e l'equazione (5) diventerà $x^2-2x-3=0$, che ci dà $x=3$. Onde $y=1$, e la radice cercata sarà $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt[4]{2}}$.

CAPITOLO XIV.

Ricerca delle radici dell' equazioni per approssimazione.

54.

Abbiamo detto che le radici irrazionali dell'equazioni al di là del quarto grado non si sapevano finora generalmente esprimere. Per rimediare a questa mancanza, di quelle radici, delle quali il valor vero conoscer non potevano, hanno procurato i

Geometri di ritrovare il valore così al vero prossimo, che l'errore commesso fosse di qualunque data quantità minore. Nell'esporre questa Teoria cercheremo in primo luogo il numero intero p prossimamente minore di ciascuna radice, in modo che la radice cada tra i numeri p, e $p+1$, il qual numero p si chiama il limite della radice: poi trovato questo limite ci accosteremo sempre più al vero valore della radice. E qui considereremo per ora soltanto le radici positive e disuguali, perchè delle uguali parleremo a parte, e perchè posto nella equazione $-x$ in luogo di x le radici negative si cangiano in positive. Onde esaminate prima le positive, per ottener le radici negative porremo $-x$ in luogo di x, e cercheremo le radici positive dell'equazione che ne risulta. Tutta questa Teoria, che siamo per esporre, si deve al Sig. *de la Grange*.

Se due quantità sostituite in luogo dell'incognita rendono il primo membro di una equazione di segno diverso, abbiamo veduto che una radice è contenuta tra quelle quantità. Da questo principio dedurremo il modo di trovare i limiti delle radici. E primieramente convien riflettere, che se si sostituiscono nell'equazione due quantità p e q, delle quali la prima sia maggiore e la seconda minore di una radice a, e sia inoltre $p-q$ minore di qualunque delle differenze tra a e le altre radici b, c, d, ec., le quantità che risultano da queste sostituzioni avranno segni diversi. Poichè queste quantità son le seguenti;

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) \text{ ec.}$$
$$(q-a)(q-b)(q-c)(q-d) \text{ ec.}$$

Ora $p-a$, e $q-a$ hanno segni diversi, e gli altri fattori $p-b$, $p-c$, ec. hanno il medesimo segno de' fattori corrispondenti $q-b$, $q-c$, ec.; infatti se due di essi, come $p-b$, $q-b$, avessero segno diverso, la radice b sarebbe compresa tra p e q, lo che è contro l'ipotesi. Dunque ec.

Quindi se sarà r la più piccola tra le differenze delle radici, e si prenderà $\Delta =$, o $< r$, poi in luogo di x si sostituiranno nel primo membro dell'equazione i numeri o, Δ, 2Δ, 3Δ, 4Δ, 5Δ, ec., le quantità nate da queste sostituzioni formeranno una serie, nella quale vi saranno tante variazioni di segno, quante radici reali, positive, e disuguali avrà la proposta. Se l'equazione data ha una sola radice reale positiva, o più radici che differiscano tra loro di più dell'unità, in tal caso si potrà fare

$\Delta=1$, cioè si potranno sostituire in luogo di x i numeri naturali 0, 1, 2, 3, ec. Ma se la proposta ha più radici positive, le differenze delle quali siano minori dell'unità, allora si deve fare $\Delta<1$, ed insieme minore o eguale alla più piccola differenza tra le radici. Tutto l'affare adunque si riduce a trovare qual sia la minima tra le differenze delle radici dell'equazione data.

55.

Proposta perciò l'equazione

$$(B)\quad x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}+Dx^{m-4}\ldots=0,$$

cerchiamo un'altra equazione, ove l'incognita u sia eguale alle differenze tra le radici della proposta. Siano a, b, c, ec. le radici dell'equazione data; i valori di u saranno $a-b$, $a-c$, ec., $b-a$, $b-c$, ec., $c-a$, $c-b$, ec., i quali, com'è chiaro, saranno $m(m-1)$ di numero, e due qualunque di essi saranno eguali e di segno contrario. Quindi l'equazione in u sarà priva di tutte le potestà dispari di u, dovendo essa rimaner la medesima, se invece di u vi si pone $-u$: e perciò se faremo $u^2=y$, ed $\frac{m(m-1)}{2}=n$, la risultante equazione sarà della forma

$$y^n-A'y^{n-1}+B'y^{n-2}-C'y^{n-3}+\text{ec.}=0.\quad (D)$$

Per trovar questa equazione, supponghiamo che x' esprima una radice della proposta diversa da quella che rappresenta x, e sarà similmente

$$x'^m-Ax'^{m-1}+Bx'^{m-2}-Cx'^{m-3}+\text{ ec.}=0.$$

E siccome u esprime la differenza tra le radici della proposta, sarà $x'=x+u$, sostituito il qual valore nell'ultima equazione, ne nascerà

$$P+Qu+Ru^2+Su^3+\text{ ec.}=0,\quad (M)$$

ove sarà (39)

$$P=x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-\text{ ec.}=0$$

$$Q=mx^{m-1}-(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}-\text{ec.}$$

$$R=\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}-\frac{(m-1)(m-2)}{2}Ax^{m-3}+\text{ec.}$$

ec.

Quindi l'equazione (M) divisa per u diventerà

$$Q+Ru+Su^2+\text{ ec.}=0.$$

Col mezzo di questa equazione e della proposta eliminando x avremo una equazione in u, nella quale se faremo $u^2=y$, otterremo la cercata equazione (D).

Ma siccome questa eliminazione presenta molte difficoltà, i coefficienti della trasformata (D) si troveranno più facilmente nel modo seguente. Rappresenti $P^{(r)}$ la somma delle potenze $r.^{esime}$ delle radici della proposta, e sarà (37)

$$\begin{aligned} P &= A \\ P^{(2)} &= AP-2B \\ P^{(3)} &= AP^{(2)}-BP+3C \\ P^{(4)} &= AP^{(3)}-BP^{(2)}+CP-4D \end{aligned}$$

ec.

Inoltre esprima $Q^{(r)}$ la somma delle potenze $r.^{esime}$ delle radici della trasformata (D), cioè la somma dei binomj $(a-b)^{2r}$ $(a-c)^{2r}$, ec. $(b-c)^{2r}$, ec., e facilmente si vedrà che il valore di $Q^{(r)}$ conterrà prima le potenze $2r.^{esime}$ delle radici della proposta moltiplicate per $m-1$, perchè in $m-1$ binomj è compresa ciascuna di queste radici, poi la somma dei termini della forma $a^{2r-1}b$ moltiplicati per $-2r$, i termini della forma $a^{2r-2}b^2$ moltiplicati per $\frac{2r(2r-1)}{2}$, quei della forma $a^{2r-3}b^3$ moltiplicati per $-\frac{2r(2r-1)(2r-2)}{2.3}$, e così in seguito. Onde sarà

$$Q^{(r)}=(m-1)P^{(2r)}-2rP^{(2r-1,\,1)}+\frac{2r(2r-1)}{2}P^{(2r-2,\,2)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\pm\frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{2.3\ldots r}.\frac{P^{(r,\,r)}}{2},$$

e sostituendovi i valori di $P^{(2r-1,\,1)}$, $P^{(2r-2,\,2)}$, ec. (38)

$$Q^{(r)}=(m-1)P^{(2r)}-2rP.P^{(2r-1)}\ldots\pm\frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{2.3\ldots r}\frac{P^{(r)}.P^{(r)}}{2}$$

$$+P^{(2r)}\left(2r-\frac{2r(2r-1)}{2}+\frac{2r(2r-1)(2r-2)}{2.3}\ldots\mp\frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{2.2.3\ldots r}\right).$$

Ma la quantità, che nella seconda linea moltiplica $+P^{(2r)}$, è

evidentemente $=-\frac{(1-1)^{2r}}{2}+1=1$; dunque avremo

$$Q^{(r)}=mP^{(2r)}-2rP.P^{(2r-1)}+\frac{2r(2r-1)}{2}P^{(2)}.P^{(2r-2)}$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{2r(2r-1)(2r-2)\ldots(r+1)}{2.3\ldots\ldots r}.\frac{P^{(r)}.P^{(r)}}{2},$$

ove nell' ultimo termine si deve prendere il segno $+$ se r è pari, ed il segno $-$ se r è dispari.

Determinati i valori delle quantità Q, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, ec., i coefficienti A', B', C', ec. della trasformata (D) saranno dati dalle formule seguenti.

$$A'=Q$$

$$B'=\frac{A'Q-Q^{(2)}}{2}$$

$$C'=\frac{B'Q-A'Q^{(2)}+Q^{(3)}}{3}$$

$$D'=\frac{C'Q-B'Q^{(2)}+A'Q^{(3)}-Q^{(4)}}{4}.$$

ec.

Dai coefficienti adunque della proposta si troveranno primieramente i valori di P, $P^{(2)}$, $P^{(3)}\ldots P^{(2n)}$; poi da essi i valori di Q, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)},\ldots Q^{(n)}$, e da questi finalmente i coefficienti A', B', C', ec. Qui poi giova il riflettere, che l'equazione (D) sarà la medesima, se tutte le radici della proposta (B) si accresceranno, o si diminuiranno della medesima quantità. Onde se dalla proposta si toglierà il secondo termine, l'equazione (D) sarà la medesima, ma si determineranno più facilmente i di lei coefficienti. Poichè allora sarà $A=0$, e perciò

$P=0$ $\qquad$ $Q=mP^{(2)}$,

$P^{(2)}=-2B$, $\qquad$ $Q^{(2)}=mP^{(4)}+6\frac{P^{(2)}.P^{(2)}}{2}$,

$P^{(3)}=3C$,

$P^{(4)}=-BP^{(2)}-4D$, $\qquad$ $Q^{(3)}=mP^{(6)}+15P^{(2)}.P^{(4)}-20\frac{P^{(3)}.P^{(3)}}{2}$,

ec. $\qquad$ ec.

$$A'=Q$$
$$B'=\frac{A'Q-Q^{(2)}}{2}$$
$$C'=\frac{B'Q-A'Q^{(2)}+Q^{(3)}}{3}$$
ec.

Per far l'applicazione di ciò che abbiamo detto a qualche caso particolare,

I. Sia proposta l'equazione $x^3-2x-5=0$, e si voglia trovare la trasformata in y. Sarà $m=3$, onde $n=\frac{m(m-1)}{2}=3$, $A=0$, $B=-2$, $C=5$; quindi $P=0$, $P^{(2)}=4$, $P^{(3)}=15$, $P^{(4)}=8$, $P^{(5)}=50$, $P^{(6)}=91$; $Q=12$, $Q^{(2)}=72$, $Q^{(3)}=-1497$; $A'=12$, $B'=36$, $C'=-643$: e perciò l'equazione cercata sarà

$$y^3-12y^2+36y+643=0.$$

II. Sia data l'equazione $x^3-7x+7=0$. Sarà $n=3$, $A=0$, $B=-7$, $C=-7$; onde $P=0$, $P^{(2)}=14$, $P^{(3)}=-21$, $P^{(4)}=98$, $P^{(5)}=-245$, $P^{(6)}=833$; $Q=42$, $Q^{(2)}=882$, $Q^{(3)}=18669$, $A'=42$, $B'=441$, $C'=49$, e l'equazione richiesta sarà

$$y^3-42y^2+441y-49=0.$$

III. Finalmente si abbia l'equazione $x^4-4x^2+4x-1=0$. Sarà $n=6$, $A=0$, $B=-4$, $C=-4$, $D=-1$; $P=0$, $P^{(2)}=8$, $P^{(3)}=-12$, $P^{(4)}=36$, $P^{(5)}=-80$, $P^{(6)}=200$, $P^{(7)}=-476$, $P^{(8)}=1156$, $P^{(9)}=-2784$, $P^{(10)}=6728$, $P^{(11)}=-16236$, $P^{(12)}=39204$; $Q=32$, $Q^{(2)}=336$, $Q^{(3)}=3680$, $Q^{(4)}=41024$, $Q^{(5)}=463232$, $Q^{(6)}=5280000$; onde $A'=32$, $B'=344$, $C'=1312$, $D'=784$, $E'=128$, $F'=0$: e l'equazione delle differenze in y sarà perciò

$$y^6-32y^5+344y^4-1312y^3+784y^2-128y=0.$$

56.

Siccome le radici dell'equazione (D) sono i quadrati delle differenze tra le radici della proposta (B), se l'equazione (D) ha tutti i suoi termini del medesimo segno (nel qual caso non può avere alcuna radice reale positiva) le differenze delle radici dell'equazione (B) saranno tutte immaginarie: e perciò questa equazione o avrà una sola radice reale, o più radici reali tra loro eguali. Di questo caso parleremo in appresso, in quello è chiaro che possiamo fare $\Delta=1$.

Se l'equazione (B) ha uno o più paja di radici eguali, l'equazione (D) ha uno o più valori di $y=0$, ed è perciò o una o più volte divisibile per y. Fatta questa divisione, quando occorre, sia l'equazione che ne risulta disposta nel modo seguente:

$$1+A''y+B''y^2+C''y^3 \ldots +R''y^r=0 \quad (E)$$

ove $r<n$, o $r=n$ se niun valore di y è $=0$. Facciamo $y=\frac{1}{z}$, ed avremo l'equazione

$$z^r+A''z^{r-1}+B''z^{r-2}+C''z^{r-3}\ldots +R''=0. \quad (F)$$

In questa equazione (F) si cerchi il limite l delle radici positive (40), e sarà l maggiore di tutti i valori positivi di z, e quindi $\frac{1}{l}$ minore di tutti i valori positivi di $\frac{1}{z}$, cioè di y, cioè di u^2.

Sarà perciò $\frac{1}{\sqrt{l}}$ minore di qualunque valore di u, cioè minore di qualunque differenza tra le radici della proposta. Ed ecco trovato il valore di Δ, cioè $\Delta=$, o $<\frac{1}{\sqrt{l}}$; o sia se k è il numero intero prossimamente maggiore di $\sqrt{l}$, $\Delta=\frac{1}{k}$. Onde se $k=1$, sarà $\Delta=1$, e potremo sostituire la serie 0, 1, 2, 3, ec. in luogo di x.

Negli altri casi, quando $k>1$, si devono sostituire nel primo membro della proposta i numeri $0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k}$, ec., e le quantità, che ne risulteranno, formeranno una serie, ove tante saranno le variazioni di segno, quante sono le radici reali, positive, e disuguali della proposta. Nel medesimo tempo conosceremo il numero intero più prossimo a ciascuna radice: siano infatti $\frac{h}{k}$ ed $\frac{h+1}{k}$ due numeri, che sostituiti nell'equazione hanno dati resultati di segno diverso, una radice sarà compresa tra $\frac{h}{k}$ ed $\frac{h+1}{k}$, e perciò il numero intero prossimamente minore di $\frac{h}{k}$ è il valor prossimo intero di questa radice. Qui poi si

osservi, che se qualche sostituzione renderà il primo membro della proposta eguale a zero, la quantità sostituita sarà una radice esatta della proposta. Del resto il numero di queste sostituzioni sarà sempre finito; poichè la quantità da sostituirsi non può esser maggiore del limite delle radici positive della proposta, giacchè tutte le quantità maggiori di questo limite danno resultati positivi. Onde se chiamiamo λ questo limite, il numero delle sostituzioni da farsi sarà al più $=k\lambda$. Siccome poi la sostituzione delle frazioni $\frac{1}{k}$, $\frac{2}{k}$, $\frac{3}{k}$, ec. è assai incomoda, tornerà meglio di porre subito nella proposta $\frac{x}{k}$ in luogo di x, e sostituire nella trasformata i numeri 0, 1, 2, 3, ec. fino al limite delle di lei radici positive: le radici della proposta caderanno tra quei due numeri consecutivi divisi per k, i quali daranno risultati di segno contrario.

57.

Fin qui abbiamo parlato delle radici reali e disuguali, diciamo adesso qualche cosa dell'eguali, e delle immaginarie. E primieramente se la proposta ha radici eguali, l'equazione (D) sarà tante volte divisibile per y, quante sono le combinazioni di due delle radici eguali; onde dalla forma della trasformata (D), si potrà subito vedere, se la proposta contiene più radici eguali. L'equazione (B) abbia pertanto r radici $=a$, e si moltiplichi per la progressione aritmetica degli esponenti de' suoi termini, in modo che ne nasca l'equazione $(B')=0$. Siccome le radici della prima equazione sono limiti delle radici della seconda (44), $r-1$ radici dell'equazione $(B')=0$ saranno comprese tra i limiti a ed a, cioè saranno $=a$. Similmente se l'equazione (B) ha s radici $=b$, l'equazione (B') avrà $s-1$ radici $=b$. Se adunque si cerca il massimo comun divisore dell'equazioni (B) e (B'); questo conterrà i fattori eguali della proposta, ma elevati ad una potenza minore di una unità. Sia R questo massimo comun divisore, e (B'') il quoziente di (B) diviso per R; l'equazione $(B'')=0$ conterrà tutte le radici medesime della proposta, ma le radici multiple di questa saranno diventate semplici nell'equazione $(B'')=0$, la quale perciò si potrà trattare con i metodi precedenti. Si possono ancora ottenere due diverse equa-

zioni, una delle quali contenga le sole radici eguali della proposta, e l'altra le sole disuguali. Si cerchi il massimo comun divisore di (B') e (B''), e fattolo $=R'$, sia (B''') il quoziente di (B'') diviso per R', l'equazione $(B''')=0$ conterrà le sole radici disuguali della proposta, e l'equazione $R'=0$ le sole radici eguali, e ciascuna di loro presa una sola volta. L'equazioni $R'=0$, e $(B''')=0$ ammettono i metodi precedenti.

Per dilucidar questa Teoria con un esempio, sia data l'equazione

$$(B) \quad x^7-7x^6+10x^5+38x^4-155x^3+221x^2-144x-36=0,$$

la quale ha tre radici $=1$, due $=2$, e le altre disuguali 3, e -3. Si moltiplichino tutti i termini per gli esponenti dell'incognita in modo, che ne nasca l'equazione (B')

$$(B') \quad 7x^6-42x^5+50x^4+152x^3-465x^2+442x-144=0,$$

e questa equazione (B') ha due radici $=1$, ed una $=2$. Si cerchi il massimo comun divisore R dell'equazioni (B) e (B'), e sarà

$$R=x^3-4x^2+5x-2,$$

e l'equazione $R=0$ ha due radici $=1$, ed una $=2$, cioè ha i fattori eguali della proposta, ma questi elevati ad una potenza minore di una unità. Sia (B'') il quoziente di (B) divisa per R,

$$(B'')=x^4-3x^3-7x^2+27x-18,$$

e le radici dell'equazione $(B'')=0$ sono 1, 2, 3, -3, cioè quelle medesime della proposta, se non che le multiple son diventate semplici. Si cerchi adesso il massimo comun divisore R' dell' equazioni (B') e (B''), e sia inoltre (B''') il quoziente di (B') divisa per R';

$$R' = x^2-3x+2$$
$$(B''')=x^2-9$$

le radici di $R'=0$ sono 1 e 2, quelle di $(B''')=0$ sono 3, e -3, cioè la prima equazione contiene le sole radici eguali, e la seconda le sole disuguali della proposta.

58.

Dopo di aver trovate tutte le radici reali tanto disuguali che eguali, se vediamo che il loro numero è minore del grado dell'equazione, ne concluderemo che le altre radici sono immaginarie. Acciò l'equazione (B) abbia tutte le sue radici reali, bisogna che i valori di u sieno anch'essi reali, ed i valori perciò

di $u^2 = y$ reali e positivi, cioè che l'equazione (D) abbia tutte le radici reali e positive. Se dunque l'equazione (D) non ha i segni alternativamente positivi e negativi, la proposta avrà senza dubbio qualche radice immaginaria. Ora le radici immaginarie sono sempre in numero pari, e due qualunque di esse sono della forma $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$; sarà perciò $u = 2\beta\sqrt{-1}$, ed $y = -4\beta^2$: dal che apparisce che la trasformata (D) ha tante radici reali negative, quante coppie di radici immaginarie si contengono nella proposta.

Quindi se facciamo $y = -t$, l'equazione (D) diventerà

$$(G) \quad t^n + A't^{n-1} + B't^{n-2} + C't^{n-3} + \text{ec.} = 0,$$

e questa equazione (G) avrà tante radici reali positive, quante coppie di radici immaginarie sono nella proposta. Siano dunque t', t'', t''', ec. le radici reali positive dell'equazione (G), ed i valori di β saranno $\frac{\sqrt{t'}}{2}$, $\frac{\sqrt{t''}}{2}$, $\frac{\sqrt{t'''}}{2}$, ec. Per conoscere adesso i valori di α si sostituisca nella proposta $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ in luogo di x, e paragonando tra di loro separatamente i termini reali, ed immaginarj, otterremo l'equazioni seguenti,

$$\left.\begin{aligned} &\alpha^m + P\alpha^{m-1} + Q\alpha^{m-2} + \text{ec.} = 0, \\ &m\alpha^{m-1} + p\alpha^{m-2} + q\alpha^{m-3} + \text{ec.} = 0, \end{aligned}\right\} (H)$$

ove i coefficienti P, Q, ec. p, q, ec. sono composti delle quantità A, B, C, ec. e di β. Ora se diamo a β uno dei precedenti valori, l'equazioni (H) devono aver luogo insieme, e perciò avranno qualche divisore comune. Si cerchi adunque il loro massimo comun divisore, e questo eguagliato a zero ci darà una equazione, per mezzo della quale conosciuta β, si conoscerà α. Qui però si rifletta, che se tutti i valori di β sono disuguali, a ciascun valore di β corrisponderà un valore di α: e perciò l'equazioni (H) avranno in questo caso una sola radice comune, o sia il loro divisore sarà di primo grado. La divisione adunque si deve allora continuare, finchè si giunga ad un residuo, in cui α abbia un solo grado, e questo residuo eguagliato a zero ci darà il cercato valore di α. Ma se due valori di β sono eguali, come a questi valori eguali possono corrispondere due valori diversi di α, conviene allora proseguire l'operazione fino ad un residuo di secondo grado per rapporto ad α, il quale ugua-

gliato a zero ci darà i due cercati valori di α. Si deve tenere una regola simile, se i valori eguali di β sono in maggior numero.

59.

Conosciuto il limite di ciascuna radice, convien partirsi da esso per accostarsi più da vicino al vero valore della medesima radice. Sia data l'equazione

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{ec.} = 0, \quad (a)$$

e sia p il limite di una delle sue radici, cioè sia $x > p$, ed $x < p + 1$. Si faccia $x = p + \frac{1}{y}$, e sostituito questo valore l'equazione ordinata per y diventi

$$A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} + \text{ec.} = 0. \quad (b)$$

Essendo adunque $\frac{1}{y} > 0$, e < 1, sarà $y > 1$; onde l'equazione (b) avrà una radice reale positiva maggiore dell'unità. Quindi col metodo precedente si cercherà il valor prossimo intero di questa radice, il quale si dica q. Si ponga $y = q + \frac{1}{z}$, e l'equazione (b) diventerà dopo questa sostituzione

$$A''z^m + B''z^{m-1} + C''z^{m-2} + \text{ec.} = 0, \quad (c)$$

la quale ha una radice reale maggiore dell'unità, il di cui limite se si chiama r, e si pone di nuovo $z = r + \frac{1}{u}$, si otterrà una nuova equazione in u, che avrà anch'essa una radice maggiore dell'unità, e così in seguito. Operando nella medesima maniera ci accosteremo sempre più al vero valore della radice. Ma se alcuuo de'numeri p, q, r, ec. sarà una radice esatta della corrispondente equazione, allora sarà o $x = p$, o $y = q$, ec., e l'operazione sarà terminata, ed il valor della radice riescirà commensurabile. Negli altri casi il valore della radice sarà irrazionale, nè potremo conoscerlo che per approssimazione.

Ciò che abbiamo detto di una radice, si deve applicare a tutte le altre: trovati cioè i limiti p, p', p'', ec. di ciascuna, ce ne dobbiamo servire per conoscer più da vicino il valore di essa. Ma qui devono osservarsi alcune cose: se i numeri p, p', p'', ec. sono tutti diversi, le trasformate (b), (c), ec. non avranno

che una sola radice maggiore dell' unità, perchè se alcuna di esse, per esempio (b), avesse due radici reali y', y'', maggiori dell' unità, sarebbe $x = p + \frac{1}{y'}$, $x = p + \frac{1}{y''}$, cioè due valori di x avrebbero contro l'ipotesi il medesimo limite p. Ne segue, che per trovare i limiti delle radici in quest'equazioni (b), (c), ec. basta allora sostituire i numeri naturali in luogo delle incognite y, z, ec. (54), finchè due sostituzioni contigue diano resultati di segno contrario.

Ma se due valori di x hanno il medesimo limite p, in tal caso l'equazioni (b), (c), ec. avranno due radici reali maggiori dell' unità, finchè si giunga ad una equazione, di cui le due radici abbiano diversi limiti; perchè allora ognuno di essi somministrerà una differente serie d'equazioni, ciascuna delle quali avrà una sola radice maggiore dell' unità. Una simile riflessione si deve fare nel caso che la proposta abbia tre o più radici, il limite delle quali sia lo stesso. In tutti questi casi adunque conviene per ciascuna trasformata (b), (c), ec. trovar l'equazione delle differenze (D), lo che richiede non leggiera fatica. Si potrà contuttociò farne di meno, se porremo nella proposta $\frac{x}{k}$ in luogo di x, essendo k determinato come sopra (56): poichè l'equazione, che ne risulterà, avrà i limiti delle radici tutti diversi. Allorchè poi avremo trovato il valore delle radici di questa equazione, se esso si dividerà per k, diventerà il valore delle radici della proposta.

Poste queste cose siano q, r, s, t, ec. i respettivi limiti interi della radice maggiore dell' unità nell'equazioni (b), (c), ec., e sarà $x = p + \frac{1}{y}$, $y = q + \frac{1}{z}$, $z = r + \frac{1}{u}$, ec., e sostituendo successivamente nel valore di x quelli di y, di z, ec., avremo $x = p$, $x = \frac{pq+1}{q}$, $x = \frac{pqr+p+r}{q}$, $x = \frac{pqrs+pq+ps+rs+1}{qrs+q+s}$ ec., le quali frazioni convergono verso il vero valore della radice cercata in modo, che la prima $\frac{p}{1}$ è minore della radice, la seconda $\frac{pq+1}{q}$ maggiore, la terza di nuovo minore, e così in seguito, cosicchè il valore cercato cadrà tra due frazioni prossime. Queste frazioni si potranno più facilmente computare nel modo seguente. Si faccia

$$\begin{array}{ll} \alpha = p & \alpha' = 1 \\ \beta = q\alpha + 1 & \beta' = q\alpha' \\ \gamma = r\beta + \alpha & \gamma' = r\beta' + \alpha' \\ \delta = s\gamma + \beta & \delta' = s\gamma' + \beta' \\ \text{ec.} & \text{ec.} \end{array}$$

ed i precedenti valori prossimi di x saranno espressi dalle frazioni $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, $\frac{\delta}{\delta'}$, ec., la ragione delle quali meglio si comprenderà dopo che avremo esposta la dottrina delle *frazioni continue*. Passiamo a dare qualch' esempio.

I. Si debbano trovare per approssimazione le radici dell' equazione di terzo grado

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Cerchiamo in primo luogo l' equazione delle differenze in y, e troveremo (55)

$$y^3 - 12y^2 + 36y + 643 = 0,$$

la qual' equazione siccome non ha i segni alternativi, si deve conchiudere (58), che la proposta ha necessariamente due radici immaginarie, e quindi una sola reale, onde per trovarne il limite, si possono (54) in luogo di x sostituire i numeri naturali 0, 1, 2, 3, ec. Facendo dunque nella proposta x successivamente $=0$, 1, 2, 3, ec. abbiamo i resultati -5, -6, -1, 16: onde la radice cercata cade tra i numeri 2 e 3, e perciò 2 è il di lei limite, cioè $p=2$.

Adesso per avvicinarci al vero valore ponghiamo $x = p + \frac{1}{y} = 2 + \frac{1}{y}$, e ne risulterà l' equazione

$$y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0,$$

la quale ha una sola radice reale maggiore dell' unità, e perciò si possono sostituire i numeri 1, 2, 3, ec. Fatto ciò si trova la radice compresa fra i numeri 10, ed 11: e quindi $q=10$. Facciamo adunque $y = 10 + \frac{1}{z}$, e ne nascerà l' equazione

$$61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0,$$

la quale posta $z=1$, 2, ec. diventa -54, 71, ec., e perciò $r=1$. Ponghiamo $z = 1 + \frac{1}{u}$, e continuando le operazioni nella medesima forma per i valori delle lettere p, q, r, ec. troveremo i numeri 2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, ec. Quindi ricaveremo i valori di α, α', β, β', ec. come segue:

$\alpha=2$ $\alpha'=1$
$\beta=21$ $\beta'=10$
$\gamma=23$ $\gamma'=11$
$\delta=44$ $\delta'=21$
$\varepsilon=111$ $\varepsilon'=53$
ec. ec.

e la radice cercata sarà prossimamente espressa dalle seguenti frazioni,

$\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21}, \frac{111}{53}, \frac{155}{74}, \frac{576}{275}, \frac{731}{349}, \frac{1307}{624}, \frac{16415}{7837}$, ec. le quali saranno alternativamente minori e maggiori del vero valore di x. Se riduciamo coteste frazioni in decimali, i valori prossimi di x saranno così espressi:

2 , 000000
2 , 100000
2 , 090909
2 , 095238
2 , 094339
2 , 094594
2 , 094545
2 , 094555
2 , 094551
2 , 094551

l'ultimo de' quali non differirà dal vero nè pure di un millionesimo.

Le altre radici della proposta abbiamo veduto essere immaginarie: chi vorrà il loro valore, l'otterrà facilmente nel modo seguente (58). Riprendiamo l'equazione in y, e ponendovi $y=-t$ essa diventerà

$$t^3+12t^2+36t-643=0,$$

e se ne cerchi la radice reale positiva. Questa radice vi sarà a motivo dell'ultimo termine negativo, e sostituendo 0, 1, 2, 3, ec. in luogo di t, troveremo esser compresa tra i numeri 5 e 6. Si faccia pertanto $t=5+\frac{1}{x}$; ne verrà l'equazione

$$38x^3-231x^2-27x-1=0,$$

e il valor prossimo di x si troverà essere $=6$. Si ponga $x=6+\frac{1}{y}$, e continuando nell'istessa guisa per i seguenti valori

prossimi troveremo i numeri 5, 6, ec., onde ricaveremo le seguenti frazioni convergenti verso la cercata radice $\frac{5}{1}$, $\frac{31}{6}$, $\frac{160}{31}$, $\frac{991}{192}$, ec. Conosciuta t, se la radice immaginaria della proposta si suppone $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, sarà $\beta=\frac{\sqrt{t}}{2}$, e perciò sarà data β. Si sostituisca adesso nella proposta $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ in luogo di x; e paragonando separatamente tra loro i termini reali ed immaginarj avremo le due equazioni

$$\alpha^3-(3\beta^2+2)\alpha-5=0$$
$$3\alpha^2-\beta^2-2=0.$$

Si cerchi il loro massimo comun divisore, e l'operazione si continui fino al residuo $-(8\beta^2+4)\alpha-15$, ov'è la sola prima potenza di α, e questo residuo eguagliato a zero ci darà $\alpha=\frac{-15}{4(2\beta^2+1)}$. Avremo così anche il valore di α, e quindi quello delle radici immaginarie $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$.

II. Prendiamo un'altro esempio dalla risoluzione dell'equazione

$$x^3-7x+7=0.$$

L'equazione delle differenze in y sarà (55)

$$y^3-42y^2+441y-49=0,$$

la quale avendo i segni alternativi ci fà sapere che la proposta può avere tutte le radici reali, e quelle disuguali tra loro, perchè l'equazione delle differenze non è divisibile per y. Facendo adunque (56) $y=\frac{1}{z}$ avremo

$$z^3-9z^2+\frac{42}{49}z-\frac{1}{49}=0.$$

Per trovare il limite l delle radici positive di questa equazione, cerchiamo il più piccolo numero, che rende positive le quantità seguenti

$$l^3+9l^2+\frac{42}{49}l-\frac{1}{49},$$
$$3l^2-18l+\frac{42}{49},$$
$$3l-9,$$

e trovato $l=9$ avremo $k=3$, e quindi $\Delta=\frac{1}{3}$. Ponghiamo perciò nella proposta $\frac{x}{3}$ in luogo di x, ed avremo

$$x^3-63x+189=0, \quad (a)$$

nella quale equazione sostituiamo adesso in luogo di x i numeri 0, 1, 2, 3, ec. Tra le quantità, che nascono da queste sostituzioni, quelle avranno alternativamente segni diversi, che corrispondono ai numeri 4, 5, 6. Quindi la proposta ha due radici positive, una delle quali cade tra $\frac{4}{3}$ e $\frac{5}{3}$, l'altra tra $\frac{5}{3}$ e $\frac{6}{3}$, o sia ambedue tra i numeri 1 e 2, ed 1 è il loro limite intero.

Per accostarci di più al vero valore di queste radici, riprendiamo l'equazione (a), nella quale i limiti delle radici sono diversi, cioè il limite di una è $=4$, e dell'altra $=5$. Ponghiamo perciò nella equazione (a) $x=4+\frac{1}{y}$, ed avremo

$$y^3-15y^2+12y+1=0,$$

la qual'equazione ha una sola radice maggiore dell'unità. Sostituiti pertanto in luogo di x i numeri 1, 2, 3, ec. si troverà questa radice esser compresa tra i numeri 14 e 15; onde $q=14$. Si faccia $y=14+\frac{1}{u}$, e sarà

$$27u^3-180u^2-27u-1=0.$$

Il valor prossimo di u si trova $=6$; e perciò $r=6$. Ponghiamo $u=6+\frac{1}{t}$, e continuando le operazioni nella medesima maniera per gli altri valori delle lettere s, ec. troveremo i numeri 1, 4, 6, ec. Sarà dunque

$\alpha=4$	$\alpha'=1$
$\beta=57$	$\beta'=14$
$\gamma=346$	$\gamma'=85$
$\delta=403$	$\delta'=99$
$\varepsilon=1958$	$\varepsilon'=481$
$\zeta=12151$	$\zeta'=2985$
ec.	ec.

onde i valori prossimi di quella radice della proposta, che cade tra $\frac{4}{3}$ e $\frac{5}{3}$ saranno espressi dalle frazioni

$$\frac{4}{3},\ \frac{57}{42},\ \frac{346}{255},\ \frac{403}{297},\ \frac{1958}{1443},\ \frac{12151}{8955},\ \text{ec.}$$

Se riduciamo in frazione decimale la penultima o l'ultima frazione, troveremo il valor prossimo della radice cercata $=1,356895$, che non differisce dal vero nè pur di un millionesimo.

Per trovare l'altra radice, che cade tra i numeri $\frac{5}{3}$ e $\frac{6}{3}$, ponghiamo nell'equazione (a) $x=5+\frac{1}{y}$, ed avremo

$$y^3-12y^2-15y-1=0,$$

ed il valor di y troveremo esser compreso tra i numeri 13 e 14. Facciamo $y=13+\frac{1}{u}$, ed avremo

$$27u^3-180u^2-27u-1=0,$$

e siccome questa è la medesima equazione in u che abbiamo trovato di sopra, è evidente che i limiti della radice positiva tanto di questa che delle seguenti equazioni saranno i medesimi, che nel primo caso, cioè 6, 1, 4, 6, ec. Sarà pertanto

$$\begin{array}{ll} \alpha=5 & \alpha'=1 \\ \beta=66 & \beta'=13 \\ \gamma=401 & \gamma'=79 \\ \delta=467 & \delta'=92 \\ \varepsilon=2269 & \varepsilon'=447 \\ \zeta=14081 & \zeta'=2774 \\ \text{ec.} & \text{ec.} \end{array}$$

ed i valori prossimi della radice, che cade tra $\frac{5}{3}$ e $\frac{6}{3}$, saranno espressi dalle frazioni

$$\frac{5}{3},\ \frac{66}{39},\ \frac{401}{237},\ \frac{467}{276},\ \frac{2269}{1341},\ \frac{14081}{8322},\ \text{ec.}$$

delle quali se riduciamo le ultime due in frazioni decimali, troveremo che il valore della radice cercata è prossimamente $=1,692022$, e la differenza dal vero appena eguaglia un millionesimo.

Rimane la radice negativa, per trovar la quale ponghiamo nella proposta $-x$ in luogo di x, ed avremo l'equazione

$$x^3-7x-7=0,$$

la quale a motivo dell' ultimo termine negativo avrà una radice reale positiva, ed una soltanto, perchè le altre due radici di questa equazione sono state trovate di sopra, e sono negative. Sostituendo pertanto i numeri naturali in luogo dell' incognita vedremo, che il valore di questa radice positiva cade tra i numeri 3 e 4, e perciò -3 è il valor prossimo della radice negativa della proposta. Trovato il limite ci potremo accostar di più al vero valore, come ne' casi precedenti abbiamo bastantemente indicato.

III. Sia data finalmente da risolversi per approssimazione l'equazione del quarto grado

$$x^4-4x^2+4x-1=0.$$

L'equazione de' quadrati delle differenze tra le radici si trova essere (55)

$$y^6-32y^5+344y^4-1312y^3+784y^2-128y=0,$$

la quale, essendo divisibile per y, c' indica che la proposta ha due radici eguali (57). Perciò si moltiplichino i termini della proposta per la progressione 4, 3, 2, 1, 0 respettivamente, e ne nascerà l' equazione

$$4x^3-8x+4=0.$$

Si cerchi il massimo comun divisore di questa equazione e della proposta, il quale si troverà essere $x-1$, e perciò le due radici eguali della proposta sono ciascuna $=1$. Per ottenere le altre radici dividiamo la proposta per $(x-1)^2$, e ne verrà l'equazione $x^2+2x-1=0$, la quale contiene le radici disuguali. Quantunque si sappia facilmente trovar le radici di questa equazione, pure chi volesse averne il valor prossimo con questo metodo, ei brevemente lo conseguirà nel modo seguente. Siccome il limite della radice positiva è zero, facciamo $x=0+\frac{1}{y}=\frac{1}{y}$, l'equazione diventerà $y^2-2y-1=0$, e il valor prossimo di y si troverà $=2$. Si ponga adunque $y=2+\frac{1}{z}$, ed avrassi

$z^2-2z-1=0$, la quale equazione essendo la medesima che la precedente in y, è chiaro che i valori prossimi tanto di z che delle susseguenti incognite saranno tutti $=2$, cioè i valori delle lettere p, q, r, ec. saranno 0, 2, 2, ec. dai quali si potranno poi formare le frazioni convergenti verso la cercata radice.

60.

Nell'equazioni del secondo grado sempre succede, che dopo varie sostituzioni e diverse equazioni ritorna poi una delle precedenti equazioni, che le altre seguitano col medesimo ordine. Per dimostrar ciò prendiamo l'equazione $Ax^2+Bx+C=0$, nella quale A, B, C sono numeri interi, e B^2-4AC è una quantità positiva, ed avremo $x=\frac{-B+\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}$, ove il radicale può esser preso positivamente o negativamente, se ambedue le radici della proposta son positive. Sia p il limite intero di x, e facendo $x=p+\frac{1}{x'}$ otterremo l'equazione $A'x'^2+B'x'+A=0$, ove $A'=Ap^2+Bp+C$, $B'=2Ap+B$, e sarà $x'=\frac{-B'+\sqrt{(B'^2-4AA')}}{2A'}$. Se p' è il valor prossimo di x', si farà $x'=p'+\frac{1}{x''}$, e così in seguito. Ora si osservi, che $B'^2-4AA'=B^2-4AC$; onde la quantità radicale sarà la medesima in tutti i valori di x, x', x'', ec.: ma rimane incerto qual segno ne' diversi valori si debba dare a questo radicale. Per togliere il dubbio si rifletta, che posto $B^2-4AC=D$ abbiamo $x'=\frac{-B'+\sqrt{D}}{2A'}=\frac{B'^2-D}{2A'(-B'-\sqrt{D})}=\frac{2A}{-B'-\sqrt{D}}$ a motivo di $B'^2-4AA'=D$, e perciò $p+\frac{1}{x'}=x=p-\frac{B'+\sqrt{D}}{2A}$
$=\frac{B'-B}{2A}-\frac{B'+\sqrt{D}}{2A}=\frac{-B-\sqrt{D}}{2A}$; onde apparisce, che il segno di $\sqrt{D}$ nel valore di x' si deve prender contrario al segno che ha nel valore di x. Quindi se denotiamo col segno $<$ il numero intero prossimamente minore della quantità che succede a questo segno, è chiaro che per aver le trasformate converrà fare il calcolo seguente.

$$p<\frac{-B+\sqrt{D}}{2A}$$

$$A'=Ap^2+Bp+C\ ,\quad B'=2Ap+B\ ,\ p'<\frac{-B'-\sqrt{D}}{2A'}$$

$$A''=A'p'^2+B'p'+A\ ,\quad B''=2A'p'+B'\ ,\ p''<\frac{-B''+\sqrt{D}}{2A''}$$

$$A'''=A''p''^2+B''p''+A',\quad B'''=2A''p''+B''\ ,\ p'''<\frac{-B'''-\sqrt{D}}{2A'''}$$

ec. ec. ec.

ove pel segno di $\sqrt{D}$ si deve prendere quel medesimo, che ha luogo nel valore di x, e le trasformate saranno

$$A'x'^2+B'x'+A=0$$
$$A''x''^2+B''x''+A'=0$$
$$A'''x'''^2+B'''x'''+A''=0$$

ec.

Osservando che $B'^2-4AA'=D=B''^2-4A'A''=B'''^2-4A''A'''=$ec. vedremo che le quantità A', A'', A''', ec. si possono più facilmente dedurre dalle formule

$$A'=\frac{B'^2-D}{4A},\ A''=\frac{B''^2-D}{4A'},\ A'''=\frac{B'''^2-D}{4A''},\ \text{ec.}$$

Se la proposta ha una sola radice positiva, o due radici positive, delle quali però la differenza sia maggiore dell'unità, ciascuna di queste trasformate avrà una sola radice reale maggiore dell'unità. Ma se la differenza delle due radici della proposta è minore dell'unità, le trasformate avranno da principio due radici maggiori dell'unità, ma poi si giungerà ad una di esse, che avrà una sola radice maggiore dell'unità. Sia

$$A^{(m)}u^2+B^{(m)}u+A^{(m-1)}=0$$

la prima trasformata, che ha una sola radice maggiore dell'unità, il di cui limite intero sia q, e la trasformata seguente sarà

$$A^{(m+1)}z^2+B^{(m+1)}z+A^{(m)}=0,$$

ove sarà $A^{(m+1)}=A^{(m)}q^2+B^{(m)}q+A^{(m-1)}$. Ma la trasformata in u avendo una sola radice $>q$, se in essa in luogo di u sostituiamo q ed il limite delle radici positive, avremo (42) due resultati di segno contrario. Ora sostituendo il limite delle ra-

dici positive abbiamo un resultato del medesimo segno di $A^{(m)}$ (40), e sostituendo q abbiamo il resultato $A^{(m)}q^2+B^{(m)}q+A^{(m-1)}=A^{(m+1)}$. Dunque $A^{(m)}$ ed $A^{(m+1)}$ hanno un segno diverso; e nell'istessa maniera dimostreremo, che nelle trasformate seguenti $A^{(m+1)}$, $A^{(m+2)}$, $A^{(m+3)}$, ec. avranno segni differenti.

Ciò posto, siccome $D=B^{(m+1)}.B^{(m+1)}-4A^{(m)}.A^{(m+1)}$ $=B^{(m+2)}.B^{(m+2)}-4A^{(m+1)}.A^{(m+2)}=$ ec., ed i prodotti $A^{(m)}.A^{(m+1)}$, $A^{(m+1)}.A^{(m+2)}$, ec. son tutti negativi, avremo primieramente $B^{(m+1)}<\sqrt{D}$, $B^{(m+2)}<\sqrt{D}$, ec., e poichè i numeri $A^{(m)}$, $A^{(m+1)}$, ec. son tutti interi, avremo ancora $A^{(m)}<\frac{1}{4}D$, $A^{(m+1)}<\frac{1}{4}D$, ec. E perchè non vi è che un certo numero di numeri interi minori di $\frac{1}{4}D$ e di $\sqrt{D}$, le quantità $B^{(m+1)}$, $B^{(m+2)}$, ec., $A^{(m)}$, $A^{(m+1)}$, ec. non potranno avere che un determinato numero di valori differenti, e se la loro serie si continua all'infinito, ritorneranno i medesimi numeri. E così pure ritornerà la medesima combinazione di termini corrispondenti nelle due serie, poichè esaurite tutte le combinazioni diverse, il numero delle quali è finito, la combinazione che segue sarà necessariamente una delle precedenti. Si avrà pertanto $A^{(n+t)}=A^{(n)}$, e $B^{(n+t)}=B^{(n)}$, ove si può considerare sempre t come pari. Perchè siccome i numeri $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ devono ritornare più volte, se la loro distanza fosse sempre dispari, basterebbe prendere per distanza la somma di due intervalli, la quale sarà pari. Ma essendo t pari, $\sqrt{D}$ avrà il medesimo segno tanto in $p^{(n)}$ che in $p^{(n+t)}$, e quindi $p^{(n+t)}=p^{(n)}$, $A^{(n+t+1)}=A^{(n+1)}$, $B^{(n+t+1)}=B^{(n+1)}$, cioè la trasformata

$$A^{(n+t+1)}z^2+B^{(n+t+1)}z+A^{(n+t)}=0$$

sarà affatto simile alla trasformata

$$A^{(n+1)}u^2+B^{(n+1)}u+A^{(n)}=0,$$

lo che dovrà dimostrarsi.

Quindi si deduce un metodo più semplice per risolvere per

approssimazione l'equazioni del secondo grado. Si calcolinò con le formule precedenti le quantità p, p', ec., A', A'', ec., B', B'', ec., finchè si giunga ad avere $A^{(n+t)}=A^{(n)}$, e $B^{(n+t)}=B^{(n)}$, essendo t pari, e non occorre andar più oltre, perchè gli altri termini si succederanno col medesimo ordine, cioè sarà $A^{(n+t+1)}=A^{(n+1)}$, ec., $B^{(n+t+1)}=B^{(n+1)}$, ec., $p^{(n+t+1)}=p^{(n+1)}$, ec.

Sia data per esempio l'equazione $2x^2-6x+3=0$: avremo $A=2$, $B=-6$, $C=3$, $\sqrt{D}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, e siccome le due radici di questa equazione sono positive, dovremo fare due diverse operazioni prendendo $\sqrt{D}$ prima positivamente e poi negativamente. Diamo in primo luogo a $\sqrt{D}$ il segno $+$, ed avremo

$$B=-6 \qquad A=2 \qquad p<\frac{6+2\sqrt{3}}{4}=2$$

$$B'=8-6=2 \qquad A'=\frac{4-12}{8}=-1 \qquad p'<\frac{-2-2\sqrt{3}}{-2}=2$$

$$B''=-4+2=-2 \qquad A''=\frac{4-12}{-4}=2 \qquad p''<\frac{2+2\sqrt{3}}{4}=1$$

$$B'''=4-2=2 \qquad A'''=\frac{4-12}{8}=-1\,.$$

Siccome abbiamo $B'''=B'$, ed $A'''=A'$, e la differenza degl'indici è pari, ci fermeremo qui, ed i limiti 2 ed 1 ritorneranno continuamente, cioè i valori di p, p', p'', ec. saranno 2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, ec.

Prendiamo adesso $\sqrt{D}$ negativamente ed avremo

$$B=-6 \qquad A=2 \qquad p<\frac{6-2\sqrt{3}}{4}=0$$

$$B'=-6 \qquad A'=\frac{36-12}{8}=3 \qquad p'<\frac{6+2\sqrt{3}}{6}=1$$

$$B''=6-6=0 \qquad A''=\frac{-12}{12}=-1 \qquad p''<\frac{-2\sqrt{3}}{-2}=1$$

$$B'''=-2 \qquad A'''=\frac{4-12}{-4}=2 \qquad p'''<\frac{2+2\sqrt{3}}{4}=1$$

$$B^{IV}=4-2=2 \qquad A^{IV}=\frac{4-12}{8}=-1 \qquad p^{IV}<\frac{-2-2\sqrt{3}}{-2}=2$$

$$B^{V}=-4+2=-2 \qquad A^{V}=\frac{4-12}{-4}=2\,.$$

Qui ci arrestiamo, perchè $B^{v}=B'''$, ed $A^{v}=A'''$: onde i valori di p, p', p'', ec. saranno 0, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ec.

Il metodo esposto per l'approssimazione delle radici di qualunque equazione, del quale siamo debitori al Sig. *de la Grange*, è il più eccellente di quanti ne sono stati finora immaginati, ed il solo in cui quest'oggetto sia trattato in tutta l'estensione, e con tutta l'esattezza. Chi avrà bene imparato questo metodo in tutte le sue parti, e se ne avrà reso facile l'uso, potrà con ragione credere di aver molto acquistato, e di esser divenuto abbastanza abile in questa parte d'Algebra, di cui abbiamo finora trattato, la quale ha per oggetto di rintracciare delle radici o il valor vero, o il valore, quanto si vuole, prossimo al vero. Meritano di esser vedute nelle *Memorie dell'Accademia di Berlino* dell'anno 1768. le *Riflessioni* del Sig. *de la Grange* per perfezionare e rendere in alcuni casi più semplice il suo metodo.

CAPITOLO XV.

De' Broblemi indeterminati.

61.

Abbiamo veduto di sopra (49), che se il numero dell'equazioni eguaglia quello delle incognite, il problema è sempre determinato, e ciascuna delle incognite ha un valore fisso. Alcune volte però succede, che il numero dell'equazioni sia maggiore o minore di quello delle incognite; nel primo caso il problema si dice *più che determinato, indeterminato* nel secondo. Nei problemi più che determinati si devono rigettare l'equazioni superflue, poi trovato per mezzo delle rimanenti equazioni il valor delle incognite, si deve vedere se l'equazioni lasciate da parte possono sussistere insieme con le altre, cioè se i valori delle incognite ricavati da queste soddisfanno ancora a quelle. Se ciò succede, è un segno che l'equazioni rigettate dipendevano dalle altre in modo, che le condizioni espresse da quelle erano in queste incluse, e il problema diventa allora determinato. Se poi il medesimo valore delle incognite non soddisfà a tutte l'equazioni, il problema è impossibile, perchè le di lui condizioni

sono tra loro contradittorie. Supponghiamo per esempio che qualche problema ci abbia condotti alle seguenti equazioni

$$2x+3y=4\ ,$$
$$3x+2y=5\ ,$$
$$5x+5y=11\ .$$

Posta da parte l'ultima equazione, dalle prime due si deduce $x=\frac{7}{5}$, $y=\frac{2}{5}$, i quali valori siccome non soddisfanno alla terza equazione, il problema sarà impossibile. Ma se la terza equazione fosse stata $5x+5y=9$, i medesimi valori soddisfarebbero anche a questa, ed il problema sarebbe determinato. La ragione della differenza di un caso all'altro è riposta in questo; nel primo caso la terza equazione non dipende dalle altre, ma ne dipende nel secondo, giacchè è la somma delle prime due. Queste poche riflessioni su' problemi più che determinati ci mostrano apertamente la loro natura; passiamo adesso a dir qualche cosa de' problemi indeterminati, i quali formano una special parte dell'Algebra, che da essi prende il nome di *Analisi indeterminata*.

62.

Essendo ne' problemi indeterminati il numero delle incognite maggiore di quello dell'equazioni, in modo che alcuna delle incognite rimane indefinita; in luogo di una o più incognite si potrà prendere qualunque numero, e quindi questi problemi ammettono infinite soluzioni. Ma siccome vi si aggiunge la condizione, che i numeri cercati siano interi e positivi, o almeno razionali, il numero delle soluzioni viene ad esser da tali condizioni limitato in modo, che spesso si riducano a poche, alcune volte non ve ne sia alcuna, altre volte poi si mantengano contuttociò infinite. Quindi avviene che questa parte di Analisi per le varie condizioni, a cui convien soddisfare, esige spesso molta acutezza e singolari artifizj di calcolo. Per la più facile intelligenza prendiamo in primo luogo a risolvere un problema semplicissimo, in cui si cercano due numeri interi, positivi, e tali che la loro somma sia 10. Se chiamiamo x ed y questi numeri, sarà $x+y=10$, cioè $x=10-y$, ove y può avere qualunque valore intero positivo, e perciò rappresentare tutti i numeri interi dall'unità all'infinito. Ma perchè anche il numero x dev'esser positivo, è chiaro che y non può esser maggiore di 10,

e se si esclude il caso di $x=0$, y non può esser maggiore di 9. Onde avranno luogo soltanto le soluzioni seguenti,

$$x=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$
$$y=9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$$

Ma le ultime quattro di queste soluzioni sono le medesime che le quattro prime: quindi la proposta questione si può risolvere in sole cinque maniere. Nella stessa guisa si potrà risolvere l'equazione $x+by=c$, ove il coefficiente di una delle indeterminate è $=1$; poichè sarà $x=c-by$, e per y non si potranno prendere, che i numeri interi positivi minori di $\frac{c}{b}$.

Ma se l'equazione da risolversi in numeri interi sarà della forma $ax+by=c$, ove a e b sono maggiori dell'unità, converrà prima ridurla alla forma precedente, in cui a o b è $=1$. Si osservi, che se i numeri a e b non fossero primi tra loro, ma avessero un comune fattore d maggiore dell'unità, bisognerebbe che anche il numero c fosse multiplo di d, acciò l'equazione potesse sussistere in numeri interi. Onde in tal caso si potrà togliere mediante la divisione il fattore comune d per ottenere una equazione più semplice, in cui a e b siano primi tra loro. Ciò posto sia $a<b$, e sia m il multiplo maggiore di a contenuto in b, in modo che sia $b=ma+b'$, e ponghiamo $x+my=t$, l'equazione $ax+by=c$ diventerà $at+b'y=c$, ove sarà $b'<a$ e $<b$. Se b' è $=1$ avremo già ottenuto l'intento; ma se b' è >1, sia di nuovo m' il multiplo maggiore di b contenuto in a, cioè sia $a=m'b'+a'$, e posto $y+m't=t'$ avremo l'equazione $a't+b't'=c$, ove sarà $a'<b'$. Se a' è >1, continueremo l'operazione nella medesima maniera; e siccome i numeri b', a', ec. son tutti positivi e vanno diminuendo, in fine giungeremo ad uno di essi che sarà eguale all'unità, e l'equazione corrispondente a questo ci darà il valore in numeri interi della respettiva indeterminata, onde poi retrocedendo avremo per mezzo dell'equazioni $x+my=t$, $y+m't=t'$, ec. i valori di tutte le altre indeterminate t, e finalmente quelli di x e di y. Sia per esempio $a'=1$, ed avremo $t=c-b't'$, $y=t'-m't=(1+b'm')t'-m'c$, ed $x=t-my=(1+mm')c-(m+b'mm'+b')t'$; cioè le due incognite x ed y saranno espresse per un' altra indeterminata t', la quale dovrà prendersi in modo, che i valori di x ed y riescano ambedue positivi.

Si debba per esempio dividere il numero 25 in due parti, una delle quali sia un multiplo di 2, e l'altra di 3: se chiamiamo $2x$ e $3y$ queste parti, sarà $2x+3y=25$. Si faccia $x+y=t$, e sarà $2t+y=25$; e siccome siamo già arrivati ad una equazione, in cui una delle indeterminate ha per coefficiente l'unità, l'operazione è terminata, ed abbiamo $y=25-2t$, ed $x=t-y=3t-25$. Per aver questi valori di y ed x espressi in numeri più piccoli facciamo $t=12-z$, ed avremo $y=2z+1$, $x=11-3z$. Il valore di y riesce positivo, se per z si prende qualunque numero positivo; ma acciò riesca positivo anche quello di x, convien che sia $3z<11$, e $z<\frac{11}{3}<4$, cioè non maggiore di 3. Onde nascono le quattro soluzioni

$$z=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,$$
$$y=1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,$$
$$x=11\ ,\ 8\ ,\ 5\ ,\ 2\ ,$$

e le parti cercate saranno 1.° $22+3$, 2.° $16+9$, 3.° $10+15$, 4.° $4+21$, le quali tutte formano il medesimo numero 25.

I problemi, che conducono all'equazione $ax+by=c$, ove a, b, e c sono numeri positivi, hanno sempre un numero limitato di soluzioni. Ma se a o b sarà un numero negativo, cioè se si dovrà risolvere in numeri interi e positivi l'equazione $ax-by=c$, si avrà in tal caso una diversa specie di problemi, i quali ammettono infinite soluzioni. Per render ciò sensibile con un esempio, cerchiamo il numero N, che sia prima divisibile per 5, poi diviso per 7 lasci il residuo 3. Sarà $N=5x$, ed insieme $N=7y+3$; onde nasce l'equazione $5x-7y=3$. Si faccia

$$x-y=t\text{, e sarà } 5t-2y=3,$$
$$2t-y=t', \qquad 2t'+t=3.$$

Quindi avrassi $t=3-2t'$

$$y=2t-t'=6-5t'$$
$$x=y+t=9-7t',$$

e le incognite x ed y saranno espresse per un'altra indeterminata t', la quale, potendo esser negativa, ci darà infiniti valori di x e di y. Per maggior semplicità facciamo $t'=1-z$, e ne verrà $y=5z+1$, $x=7z+2$, ove per z si può prendere qualunque numero intero positivo. Il numero cercato N è $=35z+10$, e se vi faremo $z=0$, otterremo il più piccolo valore di $N=10$: gli altri valori nasceranno dall'aggiunger continuamente 35 a 10.

In simil guisa se è data l'equazione $20x-31y=7$, si faccia

$$\begin{array}{ll} x-y=t\text{ , e sarà} & 20t-11y=7 \\ t-y=t' & 11t'+9t=7 \\ t'+t=t'' & 9t''+2t'=7 \\ t'+4t''=t''' & 2t'''+t''=7. \end{array}$$

Quindi avremo

$$\begin{array}{l} t''=7-2t''' \\ t'=t'''-4t''=9t'''-28 \\ t=t''-t'=35-11t''' \\ y=t-t'=63-20t''' \\ x=t+y=98-31t'''. \end{array}$$

Sarà dunque $x=98-31t'''$, $y=63-20t'''$, o sia (posta $t'''=3-z$) $x=31z+5$, $y=20z+3$, ed i minimi valori di x, y saranno respettivamente 5 e 3.

È inutile l'avvertire, che l'operazione, con cui data l'equazione $ax\pm by=c$ si trovano i numeri b', a', ec. è quella istessa con la quale si cerca il massimo comun divisore de' numeri a e b; cioè b', a', ec. sono i residui delle diverse divisioni, che a quest'oggetto si fanno. Onde siccome a e b son tra loro numeri primi, l'ultimo de' residui sarà eguale all'unità, e perciò potrà sempre ottenersi una equazione della forma $r+as=c$.

Col medesimo metodo si risolvono l'equazioni del primo grado, qualunque sia il numero delle indeterminate in esse contenute. Sia data per esempio l'equazione $5x+8y+7z=50$. Si faccia

$$\begin{array}{ll} x+y=t,\text{ e sarà} & 5t+3y+7z=50, \\ y+t=t', & 3t'+2t+7z=50, \\ t+t'=t'', & 2t''+t'+7z=50. \end{array}$$

Quindi sarà

$$\begin{array}{l} t'=50-2t''-7z, \\ t=t''-t'=3t''+7z-50, \\ y=t'-t=100-14z-5t'', \\ x=t-y=8t''+21z-150, \end{array}$$

e per avere tutte le soluzioni della proposta, converrà prender per z tutti i numeri interi positivi, e per t'' tutti i numeri interi che rendono y ed x positivi. Per più semplicità si faccia $t''+2z=20-u$, ed avrassi $y=5u-4z$, $x=10+5z-8u$. Ora acciò i valori di y ed x riescano positivi, convien prima che u sia positivo, e poi $z<\frac{5u}{4}$ e $>\frac{8u-10}{5}$; onde dovrà essere $25u>32u-40$, ed $u<6$. Quindi si troveranno le seguenti soluzioni

$$u=1,\ z=1,\ y=1,\ x=7,$$
$$u=2,\ z=2,\ y=2,\ x=4,$$
$$u=3,\ z=3,\ y=3,\ x=1.$$

Ponendo $u=4$, o $u=5$ troveremo una delle indeterminate x, o $y=0$, perciò abbiamo escluse queste soluzioni.

Si potrebbe giungere alla risoluzione della proposta equazione anche nel modo seguente. Si faccia

$$x+y+z=t,\ \text{e sarà}\ 5t+3y+2z=50,$$
$$2t+y+z=t',\qquad 2t'+y+t=50.$$

Quindi sarà
$$y=50-t-2t',$$
$$z=t'-2t-y=3t'-t-50,$$
$$x=t-y-z=3t-t',$$

o sia, posto $3t-t'=u$,

$$x=u,$$
$$y=50-7t+2u,$$
$$z=8t-3u-50,$$

ove per u e t devono prendersi tutti i numeri interi e positivi, che rendono positive le tre precedenti indeterminate.

63.

Passiamo adesso a vedere, come si risolvano in numeri interi quell'equazioni, nelle quali una delle indeterminate y non è inalzata che alla prima potenza, qualunque siano le potenze dell'altra. Prendendo il valore di y avremo

$$y=\frac{a+a'x+a''x^2+a'''x^3+a^{IV}x^4+\text{ec.}}{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+b^{IV}x^4+\text{ec.}},$$

e converrà cercare un numero intero, che preso per x renda il numeratore di questa frazione divisibile pel denominatore. Si faccia

$$p=a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\text{ec.},$$
$$q=b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\text{ec.},$$

ed eliminata x da queste due equazioni si giungerà ad una equazione della forma

$$A+Bp+Cq+Dp^2+Epq+Fq^2+\text{ec.}=0,$$

ove i coefficienti A, B, C, ec. saranno numeri interi composti de' numeri a, b, a', b', ec. Ora siccome $y=\frac{p}{q}$, e quindi $p=qy$, se sostituiamo questo valore di p avremo

$$A+Bqy+Cq+Dq^2y^2+Eq^2y+Fq^2+\text{ec.}=0,$$

ove tutti i termini son moltiplicati per q eccettuato il primo termine A: quindi anche A sarà divisibile per q, altrimenti y e q non potrebbero esser numeri interi. Si cerchino adunque tutti i divisori di A, e si supponga q successivamente eguale a ciascuno di essi, ed ognuna di queste supposizioni ci darà una equazione determinata in x, della quale si cercheranno le radici intere, e quelle di queste radici, che renderanno p divisibile per q, ci daranno un valore intero anche per y, e risolveranno il problema.

Se q non contiene x, cioè se si dovrà risolvere l'equazione

$$y=\frac{a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\text{ ec.}}{b},$$

il metodo precedente non potrà usarsi; ma si troveranno tutti i valori di x nel modo seguente. Si supponga che sia n un valore di x che risolva l'equazione, cioè che renda $a+a'x+a''x^2+$ ec. divisibile per b, è chiaro che ogni numero della forma $n\pm bm$, ove m sia un numero intero, la risolverà egualmente. Ora, se n è $>\frac{b}{2}$ (facendo astrazione dai segni di n e di b) è chiaro che potremo sempre determinare m in modo, che sia $n\pm bm<\frac{b}{2}$, e ciò potrà farsi in una sola maniera per ciascun valore di n e di b. Se si chiama n' questo valore di $n\pm bm$, che è $<\frac{b}{2}$, si avrà generalmente $n=n'\pm bm$. Quindi se si sostituiscono in luogo di x tutti i numeri positivi e negativi che non superano $\frac{b}{2}$ nella quantità $a+a'x+a''x^2+$ec., e si chiamano n', n'', n''', ec. quei che rendono questa quantità divisibile per b, tutti gli altri valori di x che risolvono il problema saranno espressi dalle formule $n'\pm bm'$, $n''\pm bm''$, $n'''\pm bm'''$, ec., ove m', m'', m''', ec. rappresentano numeri interi.

64.

Sia proposta adesso l'equazione del secondo grado

$$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2=0,$$

e si debbano trovare i valori razionali di x e di y, i quali soddisfanno a questa equazione. Risolvendola avremo

$2fy+ex+c=\surd[(c+ex)^2-4f(a+bx+dx^2)]=\surd(m+nx+px^2)$ facendo $m=c^2-4af$, $n=2ce-4bf$, $p=e^2-4df$, e la questione si ridurrà a trovar dei valori di x, che rendano la quantità $m+nx+px^2$ eguale ad un quadrato. Sia dunque $m+nx+px^2=z^2$, ed avremo $2px+n=\surd(4pz^2+n^2-4mp)$, cioè tutta la difficoltà sarà ridotta a render la formula Az^2+B eguale ad un quadrato, essendo A e B numeri interi dati positivi o negativi, e z un numero indeterminato, che dev'essere razionale. Supponghiamo in primo luogo che A sia un quadrato, cioè che debba rendersi razionale la formula $\surd(a^2z^2+B)$. Facciamo $\surd(a^2z^2+B)=az+m$, ed avremo $a^2z^2+B=a^2z^2+2maz+m^2$, e $z=\frac{B-m^2}{2ma}$: e se prendendo per m qualunque numero intero o fratto, positivo o negativo daremo questo valore a z, la formula $\surd(a^2z^2+B)$ riescirà razionale, cioè sarà $=\frac{B-m^2}{2m}+m=\frac{B+m^2}{2m}$.

Sia adesso B un quadrato $=b^2$, e facendo $\surd(Az^2+b^2)=b+mz$ avremo $Az^2+b^2=b^2+2bmz+m^2z^2$, cioè $Az=2bm+m^2z$, onde si deduce $z=\frac{2bm}{A-m^2}$, il qual valore rende la formula $\surd(Az^2+b^2)$ razionale ed $=\frac{Ab+bm^2}{A-m^2}$.

Sia in terzo luogo la quantità Az^2+B il prodotto di due fattori razionali, in modo che si debba risolvere l'equazione $(az+b)(cz+d)=y^2$. Facciamo $y=m(az+b)$, e quadrando avremo $(az+b)(cz+d)=m^2(az+b)^2$, cioè $cz+d=m^2(az+b)$, e quindi $z=\frac{m^2b-d}{c-m^2a}$.

Sia finalmente la formula $Az^2+B=p^2+qr$, essendo p, q, r quantità della forma $a+bz$. In questo caso facendo $\surd(p^2+qr)=p+mq$ avremo $qr=2mpq+m^2q^2$, cioè $r=2mp+m^2q$, dalla quale equazione facilmente si dedurrà il valore di z.

Nei casi diversi da quelli che abbiamo adesso considerati è molto difficile la risoluzione dell'equazione $Az^2+B=y^2$, ma se un solo valore di z si conosce, facilmente se ne deducono tutti gli altri infiniti, che egualmente la risolvono. Sia a questo valore di z, che rende $Aa^2+B=b^2$, cioè $B=b^2-Aa^2$, e sostituito questo valore di B la nostra equazione prenderà la forma $A(z^2-a^2)+b^2=y^2$, o sia $A(z+a)(z-a)+b^2=y^2$. Questa equa-

zione è nel quarto de' casi contemplati di sopra, perciò si faccia $y=b+m(z-a)$, ed avrassi $A(z+a)=2bm+m^2(z-a)$; onde si ricava $z=\frac{am^2-2bm+Aa}{m^2-A}$.

Fin qui erano giunti i Geometri nella risoluzione dell'equazioni del secondo grado, quando il Sig. *de la Grange* si rivolse a perfezionare questa parte d'Algebra, e l'arricchì di molti ed eccellenti metodi. A questo gran Geometra si deve la generale risoluzione dell'equazione $Az^2+B=y^2$, che qui brevemente esporremo, rimandando i nostri leggitori per una maggiore istruzione nell'Analisi indeterminata alle *Memorie dell' Accademia di Berlino* degli anni 1767, e 1768, ed al secondo tomo degli *Elementi d' Algebra* del Sig. *Euler*.

Sia data pertanto la formula Az^2+B, che dev'essere un quadrato, ove nè A nè B son quadrati, perchè altrimenti si potrebbe risolvere con i metodi precedenti. Se i numeri A e B son divisibili per qualche quadrato, in modo che sia $A=a^2A'$, $B=b^2B'$, la formula Az^2+B sarà della forma $a^2A'z^2+b^2B'$, e divisa per b^2 e posto $\frac{az}{b}=z'$ si ridurrà ad $A'z'^2+B'$, e conosciuto il valore di z' che rende questa formula un quadrato, sarà $\frac{bz'}{a}$ il valore di z che renderà un quadrato la formula Az^2+B. Consideriamo adunque la formula Az^2+B, in cui nè A nè B contengono fattori quadrati, e facciamo $z=\frac{p}{q}$, essendo questa frazione ridotta ai minimi termini; avremo la quantità $\frac{Ap^2}{q^2}+B$, che dovrà essere un quadrato, dunque lo sarà anche la quantità Ap^2+Bq^2, e quindi si dovrà risolvere l'equazione $Ap^2+Bq^2=y^2$, ove p, q, ed y devono essere numeri interi. Si osservi che il numero q dovrà esser primo con A; perchè se avessero un fattore comune c, il termine Bq^2 sarebbe divisibile per c^2, ed il termine Ap^2 solo per c, giacchè p e q son primi tra loro, ed A per ipotesi non contiene alcun fattore quadrato, onde la quantità Ap^2+Bq^2 non sarebbe divisibile che una sola volta per c, e non potrebbe perciò essere un quadrato. Nella medesima maniera si dimostrerà che p e B non devono contenere alcun fattore comune.

Ciò posto sia $A>B$ indipendentemente dai loro segni, e si scriva l'equazione sotto la forma $Ap^2=y^2-Bq^2$, e siccome p, q, ed y sono numeri interi, dovrà essere y^2-Bq^2 divisibile per A. Si faccia $y=nq-Aq'$, e poichè A e q sono primi tra loro, questa equazione potrà sempre risolversi in numeri interi (62), e ci darà i valori di n e di q', qualunque siano quelli di y e di q. Fatta la sostituzione la quantità y^2-Bq^2 diventa $(n^2-B)q^2-2nAqq'+A^2q'^2$, che dev'esser divisibile per A; e siccome lo sono tutti i termini fuorchè il primo, converrà che sia n^2-B divisibile per A, perchè q ed A sono numeri primi tra loro. Quindi (63) si tenteranno per n tutti i numeri non $>\frac{A}{2}$, e se non se ne trova alcuno, che renda n^2-B divisibile per A, se ne concluderà che l'equazione $Ap^2=y^2-Bq^2$ non è risolubile in numeri interi, cioè che la formula Az^2+B non può essere un quadrato. Ma se si troverà uno o più valori di n, che abbiano queste proprietà, si prenderanno tutti uno dopo l'altro, e si continuerà il calcolo come segue.

Prima però si osservi, che sarebbe inutile il dare ad n dei valori $>\frac{A}{2}$; poichè se chiamiamo n' uno dei valori soddisfacienti di n che sono $<\frac{A}{2}$, tutti gli altri che nascono da questo saranno espressi dalla formula $n'\pm mA$, e sostituendo questi in luogo di n nella quantità $(n^2-B)q^2-2nAqq'+A^2q'^2$, cioè $(nq-Aq')^2-Bq^2$ avremo il medesimo resultato, che se sostituissemo solamente n', ed aggiungessimo a q' la quantità $\pm mq$; onde siccome q' è un numero indeterminato, la sostituzione di $n'\pm mA$ non ci darà formule diverse da quella, che nasce dalla semplice sostituzione di n'.

Trovato un valore di n, sia A' il quoziente di n^2-B diviso per A, in modo che sia $AA'=n^2-B$, e l'equazione $Ap^2=y^2-Bq^2$ divisa per A diventerà

$$p^2=A'q^2-2nqq'+Aq'^2,$$

ove A' sarà $<A$, perchè $A'=\frac{n^2-B}{A}$, e $B<A$, ed $n<\frac{A}{2}$. Ora se A' è un quadrato, potremo fare $q'=0$, $q=1$, e $p=\sqrt{A'}$, ed otterremo una soluzione della proposta, dalla quale potremo poi dedurre tutte le altre infinite. Ma se A' non è un quadrato, si

osservi se egli è $<B$, o se almeno contiene un fattore quadrato, tolto il quale divenga $<B$ indipendentemente dai segni. In tal caso si moltiplichi l'equazione per A', e si avrà

$$A'p^2 = A'^2q^2 - 2nA'qq' + (n^2 - B)q'^2 = (A'q - nq')^2 - Bq'^2;$$

onde la formula $Bq'^2 + A'p^2$ dovrà essere un quadrato, e quindi se dividiamo per p^2 e facciamo $\frac{q'}{p} = z'$, dovrà essere un quadrato la formula $Bz'^2 + A'$. Nel caso che A' avesse un fattore quadrato a^2 si farà $\frac{q'}{ap} = z'$, e si otterrà la formula $Bz'^2 + C$, la quale è simile alla proposta $Az^2 + B$, ma in quella i coefficienti B e C sono minori.

Se poi A', o A' diviso pel suo massimo fattor quadrato non è $<B$, si faccia $q = mq' + q''$, e l'equazione $p^2 = A'q^2 - 2nqq' + Aq'^2$, diventerà

$$p^2 = A''q'^2 - 2n'q'q'' + A'q''^2,$$

ove $n' = n - mA'$, ed $A'' = A'm^2 - 2mn + A = \frac{n'^2 - B}{A'}$. Si determini il numero intero m in modo che sia $n' < \frac{A'}{2}$ o $= \frac{A'}{2}$ indipendentemente dai segni, lo che è sempre possibile, ed allora sarà $A'' < A'$, perchè $A'' = \frac{n'^2 - B}{A'}$, e $B =$, o $< A'$, ed $n' =$, o $< \frac{A'}{2}$. Adesso si farà il medesimo discorso di sopra, e se A'' è un quadrato, si avrà la risoluzione dell'equazione; se A'' diviso pel suo maggior fattore quadrato b^2 diventerà $<B$, si moltiplicherà tutta l'equazione per A'', e posto $\frac{q''}{bq'} = z'$ si otterrà la formula $Bz'^2 + C$, che dovrà essere un quadrato, e nella quale i coefficienti B e C saranno minori di quei della proposta $Az^2 + B$.

Ma se non succede alcuno di questi casi, faremo di nuovo $q' = m'q'' + q'''$, e l'equazione diventerà

$$p^2 = A'''q''^2 - 2n''q''q''' + A''q'''^2,$$

ove sarà similmente $n'' = n' - m'A''$, e $A''' = \frac{n''^2 - B}{A''}$, e prendendo m' in modo che n'' non sia $> \frac{A''}{2}$ avremo $A''' < A''$, e sù questa equazione faremo delle riflessioni simili alle precedenti, e così in seguito. Ora siccome i numeri A, A', A'', A''', ec. vanno

continuamente diminuendo, giungeremo finalmente ad uno di essi, che sarà $<B$, e chiamando C questo termine avremo la formula Bz'^2+C, che dovrà essere un quadrato. Quindi col calcolo precedente la formula Az^2+B si ridurrà ad un'altra più semplice Bz'^2+C, almeno se il problema è possibile. E se facciamo una simile operazione sulla formula Bz'^2+C, la ridurremo ad un'altra più semplice Cz''^2+D, e così in seguito. E siccome i numeri A, B, C, D, ec. formano una serie decrescente di numeri interi, questa non potrà andare all'infinito, ma sarà sicuramente limitata. Onde se il problema non ammette soluzione in numeri razionali, giungeremo ad una condizione impossibile a soddisfarsi, ma se il problema è risolubile, arriveremo ad una equazione, in cui uno de' coefficienti sarà un quadrato, e risoluta questa potremo rimontare retrocedendo a tutte le altre, fino alla prima $Ap^2+Bq^2=y^2$. Ho supposto, che nella formula Az^2+B sia A maggiore di B; se fosse $A<B$ si porrà $z=\frac{q}{p}$, e tutto il resto anderà come sopra.

Esempio I.

Si debba rendere eguale ad un quadrato la formula $21z^2+7$. Siccome i numeri 7 e 21 non hanno alcun fattore quadrato, e 21 è >7, io faccio $z=\frac{p}{q}$, ed ottengo l'equazione

$$21p^2=y^2-7q^2\,.$$

Cerco in primo luogo un numero intero n che sia $<\frac{21}{2}$, e renda n^2-7 divisibile per 21, e trovo $n=7$, in modo che $7^2-7=2.21$. Ora pongo $y=7q-21q'$, e dividendo per 21 ottengo l'equazione

$$p^2=2q^2-14qq'+21q'^2,$$

ove il coefficiente di q^2 è minore del coefficiente di q^2 nell'altra equazione; dunque moltiplicando per 2 avrò

$$2p^2=4q^2-28qq'+42q'^2=(2q-7q')^2-7q'^2,$$

e perciò la formula $7q'^2+2p^2$, o sia, posto $\frac{q'}{p}=z'$, la formula $7z'^2+2$ dovrà essere un quadrato.

Operando di nuovo su questa formula osservo che i numeri 2 e 7 non hanno fattori quadrati, e che 7 è >2; perciò faccio $z'=\frac{r}{s}$, ed ho da risolvere l'equazione

$$7r^2=y^2-2s^2 .$$

Cerco un numero $n<\frac{7}{2}$, che renda la quantità n^2-2 divisibile per 7, e trovato $n=3$, in modo che $3^2-2=1.7$, faccio $y=3s-7s'$, e giungo all'equazione

$$r^2=s^2-6ss'+7s'^2 .$$

Poichè il coefficiente di s^2 è un quadrato $=1$, risolvo questa equazione prendendo $s'=0$, $s=1$, $r=1$, e quindi deduco $\frac{r}{s}=1=z'=\frac{q'}{p}$, cioè $q'=p$. Sostituendo questo valore di q' nella equazione $7q'^2+2p^2=(2q-7q')^2$ io ne ricavo $9p^2=(2q-7p)^2$, ed estraéndo la radice quadrata $3p=2q-7p$, cioè $q=5p$, e $z=\frac{p}{q}=\frac{1}{5}$, il qual valore di z rende la formula $21z^2+7$ eguale ad un quadrato.

Esempio II.

Sia proposto di rendere razionale la formula $\sqrt{(52z^2-23)}$. Osservo primieramente che 52 è divisibile per 4 che è un quadrato, e poichè $\frac{52}{4}=13$ è <23, faccio $z=\frac{q}{2p}$, e pongo la risultante equazione sotto la forma

$$-23p^2=y^2-13q^2 .$$

Conviene adesso cercare un numero $n<\frac{23}{2}$, in modo che sia n^2-13 divisibile per 23; si trova $n=6$, che ci dà $6^2-13=-1\times-23$, dunque si faccia $y=6q+23q'$, e si avrà l'equazione

$$p^2=-q^2-12qq'-23q'^2 .$$

Siccome il coefficiente di q^2 in questa equazione è minore del coefficiente di q^2 nella equazione precedente, si moltiplichi per -1, e si otterrà

$$-p^2=q^2+12qq'+(6^2-13)q'^2=(q+6q')^2-13q'^2,$$

onde dovrà essere un quadrato la formula $13q'^2-p^2$, o sia la formula $13z'^2-1$, posto $\frac{q'}{p}=z'$.

Poichè il numero 13 non ha alcun fattore quadrato, faccio $z'=\frac{r}{s}$, ed ho l'equazione

$$13r^2 = y^2 + s^2 .$$

Cerco il numero $n < \frac{13}{2}$, che renda n^2+1 un multiplo di 13, e trovato $n=5$ pongo $y=5s-13s'$, e l'equazione $13r^2=y^2+s^2$ diventa

$$r^2 = 2s^2 - 10ss' + 13s'^2 .$$

Siccome il coefficiente 2 di s^2 è maggiore di 1 coefficiente di s^2 nella precedente equazione, cerco un numero m tale, che $5-2m$ non sia >1, e trovato $m=2$ faccio $s=2s'+s''$, e l'equazione diventa

$$r^2 = s'^2 - 2s's'' + 2s''^2 .$$

Ora siccome in questa il coefficiente di s'^2 è un quadrato, la risolvo facendo $s''=0$, $s'=1$, $r=1$, e dalla equazione $s=2s'+s''$ ottengo $s=2$: onde $z'=\frac{1}{2}=\frac{q'}{p}$, e perciò $q'=\frac{p}{2}$, e sostituito questo valore di q' l'equazione $13q'^2-p^2=(q+6q')^2$ mi dà $\frac{3p}{2}=q+3p$, cioè $q=-\frac{3p}{2}$, e $z=\frac{q}{2p}=-\frac{3}{4}$, oppure $z=\frac{3}{4}$, perchè nella formula $52z^2-23$ non essendovi che il quadrato di z, il valore di z può essere tanto positivo che negativo.

Esempio III.

Sia proposta finalmente la formula $17z^2+15$. Siccome i numeri 17 e 15 non hanno fattori quadrati, ponendo $z=\frac{p}{q}$ avremo l'equazione

$$17p^2 = y^2 - 15q^2 .$$

Si cerchi il numero n che renda n^2-15 un multiplo di 17, si troverà $n=7$, e questo è il solo valore soddisfaciente di n, che sia $<\frac{17}{2}$. Posto perciò $y=7q-17q'$ si otterrà l'equazione

$$p^2 = 2q^2 - 14qq' + 17q'^2 ,$$

la quale, poichè $2q^2$ è $<15q^2$, moltiplicata per 2 diventa

$$15q'^2 + 2p^2 = (2q - 7q')^2 ,$$

onde fatto $\frac{q'}{p}=z'$, la formula $15z'^2+2$ dovrà essere un quadrato.

Posto pertanto $z'=\frac{r}{s}$, perchè i coefficienti non contengono fattori quadrati, si avrà l'equazione

$$15r^2 = y^2 - 2s^2.$$

Converrebbe adesso cercare un numero n, che rendesse $n^2 - 2$ divisibile per 15; ma siccome non si trova alcun numero $< \frac{15}{2}$, che preso per n soddisfaccia a questa condizione, si concluderà che l'equazione $15r^2 = y^2 - 2s^2$ non è risolubile in numeri interi, e quindi che la formula $17z^2 + 15$ non può mai diventare un quadrato, qualunque valore razionale si dia a z.

Allorchè si conosce un solo valore razionale di z, che rende la formula $Az^2 + B$ eguale ad un quadrato, si troveranno col metodo, che abbiamo accennato di sopra, tutti gli altri infiniti valori di z, e questi saranno in parte interi, e in parte fratti. Ma se si volessero i soli valori interi di z, cioè se si dovesse risolvere l'equazione $Az^2 + B = y^2$ in numeri interi, ne nascerà un altro problema assai più difficile del primo, di cui ci riserbiamo a trattare dopo di avere esposta la dottrina delle frazioni continue.

Fine della Prima Parte.

ELEMENTI DI ALGEBRA

PARTE SECONDA

INTRODUZIONE ALL' ANALISI INFINITESIMALE

CAPITOLO PRIMO

Delle Funzioni in generale.

65.

Finora abbiamo distinte le quantità cognite dalle incognite; adesso avremo specialmente riguardo a quella proprietà delle quantità, per la quale altre sono *costanti*, altre *variabili*. Si dice quantità costante quella che ritien sempre il medesimo valore, e si suol denotare con le prime lettere dell'Alfabeto a, b, c, ec.; variabile si chiama quella quantità indeterminata, che può prendere tutti i valori determinati, e si esprime con le ultime lettere dell'Alfabeto x, y, z, ec. Sia proposto di trovare due quantità, delle quali sia data la somma a: è chiaro che chiamata x una di queste quantità, l'altra sarà $a-x$, e con ciò solo sarà soddisfatta la condizione del problema; e siccome non vi resta niente per determinare x, potrà essa avere qualunque valore. Sarà perciò in questo problema a una quantità costante, ed x una quantità variabile.

Funzione di una quantità variabile è una espressione analitica in qualunque modo composta di questa quantità variabile, e di quantità costanti: così $a+bx$, $a+bx+cx^2$, $ax+\sqrt{(a^2-x^2)}$, c^x sono funzioni di x. Quindi la funzione di una variabile è anch'essa una quantità variabile, poichè la variabile potendo

avere qualunque valore, a ciascuno de' quali corrisponde un valore della funzione, anche la funzione prenderà infiniti valori; nè vi sarà alcun valore determinato, che la funzione non possa avere. Si danno però alcune funzioni apparenti, le quali ritengono sempre il medesimo valore comunque si cangi la variabile: tali sono x^0, 1^z, $\frac{a^2+ax}{a+x}$, che in realtà sono quantità costanti.

Le varie specie delle funzioni si devono ripetere dai diversi modi, ne' quali sono per mezzo di operazioni analitiche dalla variabile composte. Tali operazioni sono la somma, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione, l'inalzamento alle potenze, l'estrazione delle radici, ed anche la risoluzione dell'equazioni. Oltre queste operazioni algebraiche ve ne sono altre, che si chiamano *trascendenti*, come l'*esponenziali*, le *logaritmiche*, e molte altre così dette, perchè trascendono le forze dell'Algebra ordinaria, e dipendono dalla quadratura incognita di qualche curva. Così, come non sappiamo algebraicamente esprimere l'area del cerchio, tutte le operazioni dipendenti dalla quadratura del cerchio saranno trascendenti. Quindi nasce la prima e la principale divisione delle funzioni in algebraiche, e trascendenti; quelle son composte per mezzo di operazioni algebraiche, queste con operazioni trascendenti. Qui però conviene osservare che la funzione non si reputa mai trascendente, se l'operazione trascendente non involve la variabile. Così se chiamiamo c la circonferenza del cerchio di un dato raggio, quantunque questa quantità sia trascendente, pure le funzioni $c+x$, cx sono algebraiche.

Le funzioni algebraiche sono razionali, se la variabile non è compresa tra i radicali; irrazionali, se la variabile è involta ne' radicali. Tra le razionali quelle sono intere, nelle quali la variabile non ha esponenti negativi, nè si trova nel denominatore delle frazioni che compongono la funzione; all'opposto sono fratte quelle che hanno la variabile coll'esponente negativo, o nel denominatore delle frazioni che le compongono.

Se la funzione X è determinata per la variabile x e costanti nel medesimo modo, che la funzione Y è espressa per y e costanti, queste funzioni X ed Y si dicono *simili*: tali sarebbero le funzioni $a-bx+cx^2$, $a-by+cy^2$. Le funzioni simili sono tali, che permutate le variabili una si cangia nell'altra.

Qualunque funzione intera X si può risolvere ne' suoi fattori: facciamo $X=0$, e le radici di questa equazione siano a, b, c, ec.; saranno $x-a$, $x-b$, $x-c$, ec. i fattori della funzione X, ed essa si potrà esprimere per mezzo del loro prodotto. Così, essendo $X=Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2} \ldots\ldots +T$, sarà

$x^n+\frac{Bx^{n-1}}{A}+\frac{Cx^{n-2}}{A}\ldots\ldots+\frac{T}{A}=(x-a)(x-c)(x-d)$ ec.; e quindi $X=A(x-a)(x-b)(x-c)$ ec. Mutando i segni a tutti i fattori $x-a$, $x-b$, ec., avremo ancora $X=\pm A(a-x)(b-x)(c-x)$ ec.; ove si deve prendere il segno $+$ o $-$, secondochè n è pari o dispari. Ma per la natura dell'equazioni $\pm\frac{T}{A}=abc\ldots\ldots$; quindi

$X=\frac{T(a-x)(b-x)(c-x)\text{ ec.}}{abc\ldots\ldots}=T\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(1-\frac{x}{c}\right)$ ec. In due diverse forme adunque una funzione intera si può esprimere per mezzo de' suoi fattori, e questi saranno reali o immaginarj, secondochè le radici della equazione $X=0$ sono reali o immaginarie. Ma siccome abbiamo dimostrato, che delle radici immaginarie due son sempre tali, che il prodotto de' fattori, i quali ne risultano, è reale, una funzione intera qualunque sarà risolubile in fattori reali del secondo grado.

66.

Aggiungiamo a quello che abbiamo detto qualche cosa sulle funzioni di più variabili. Una funzione delle variabili x, y, z, ec. è una espressione formata da queste variabili per mezzo di operazioni tanto algebraiche, che trascendenti. Oltre al riferire a queste funzioni ciò che abbiamo detto sulla diversità delle funzioni di una sola variabile, si deve particolarmente notare la specie seguente. Una funzione intera di due o più variabili si dice *omogenea*, se le variabili formano in ciascun termine di essa la medesima *dimensione*, col qual nome s'intende la somma degli esponenti delle variabili; *eterogenea* se la dimensione è diversa. Le funzioni intere omogenee si dividono in specie secondo la loro dimensione: così $ax+by+cz+$ ec. è la formula generale delle funzioni intere di una dimensione, $ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2+$ ec. è la formula generale delle funzioni di due dimensioni, e così in seguito. La costante a poi

si chiama una funzione di nessuna dimensione, perchè si può supporre moltiplicata per x^0. Le funzioni fratte saranno omogenee, se avranno la medesima dimensione in tutti i termini del numeratore, e la medesima in tutti quei del denominatore, e la dimensione della funzione sarà eguale alla differenza delle dimensioni del numeratore e del denominatore. Così $\frac{x^4+ax^2y^2}{y^3+bx^3}$ è una funzione omogenea di una dimensione, $\frac{x^5-by^5}{xy-y^2}$ è di tre dimensioni, $\frac{y}{x}$ ed $\frac{x^2-byz}{y^2+bz^2}$ sono funzioni di niuna dimensione, $\frac{a}{ay-bx}$ di -1 dimensione, $\frac{ay+bx}{x^4-cxz^3}$ di -3 dimensioni. Riguardo alle funzioni irrazionali, se X è una funzione omogenea di n dimensioni, sarà $\sqrt{X}$ una funzione di $\frac{1}{2}n$ dimensioni, $\sqrt[3]{X}$ di $\frac{1}{3}n$ dimensioni, e in generale $X^{\frac{\mu}{\nu}}$ di $\frac{\mu}{\nu}n$ dimensioni. Così $\sqrt{(x^2+y^2)}$ è una funzione di una dimensione, $\sqrt[4]{(y^2+xy)^3}$ è di $\frac{3}{2}$ dimensioni, $\frac{y^2-xz}{\sqrt{(x^4+y^4)}}$ di niuna dimensione, $\frac{y\sqrt{x}}{x^2\sqrt{y}-\sqrt{(y^5+xz^4)}}$ di -1 dimensione.

Come le funzioni intere di una sola variabile x si risolvono in fattori della forma $a+bx$, così le funzioni intere omogenee di due variabili x, y si possono risolvere in fattori della forma $ay+bx$. Infatti se in una funzione omogenea di n dimensioni facciamo $y=ux$, essa diventerà il prodotto della potenza x^n in una funzione intera della variabile u; poichè mediante questa sostituzione la dimensione di x crescerà in ciascun termine della dimensione di y; e come le dimensioni di x ed y prese insieme erano n in ciascun termine, adesso avrà x n dimensioni in tutti i termini, e perciò la funzione sarà divisibile per x^n, ed il quoziente comprenderà la sola variabile u. Sia V questo quoziente, il quale si potrà risolvere in fattori della forma $au+b$, ed i fattori della funzione proposta Vx^n saranno del-

la forma $aux+bx$, cioè $ay+bx$, perchè $ux=y$. Quindi la forma generale delle funzioni omogenee intere di due dimensioni sarà $(ay+bx)(cy+dx)$, quella di tre $(ay+bx)(cy+dx)(ey+fx)$, ec.

Riguardo alle funzioni intere di più variabili si deve anche notare la loro divisione in *ordini*, nella quale l'ordine è determinato dalla massima dimensione, che s' incentra ne' termini della funzione. Così $x^2+y^2-ax+by+c$ è una funzione del second'ordine, $xy^3-ay^2+bxy-cx^2$ è una funzione del quart'ordine.

Finalmente delle funzioni intere altre sono *complesse*, altre *incomplesse*. Complesse si dicono quelle, le quali si possono risolvere in due o più fattori razionali: tale sarebbe la funzione $y^4-a^2y^2+2abxy-b^2x^2-2acy+2bcx-c^2$, perchè è eguale al prodotto $(y^2+ay-bx+c)(y^2-ay+bx-c)$; tali ancora sono le funzioni omogenee di due variabili, perchè si possono risolvere in fattori semplici. Si comprende facilmente, che le funzioni sono incomplesse, quando non si possono risolvere in fattori razionali.

CAPITOLO II.

Delle quantità esponenziali, e de' logaritmi.

67.

Siccome l'indole delle funzioni algebraiche abbastanza si conosce da ciò che ne abbiamo detto nella prima Parte, prendiamo a considerare qualche funzione trascendente, e in primo luogo parliamo delle quantità *esponenziali*, e dei *logaritmi*. Si dicono quantità esponenziali quelle potestà che hanno l'esponente variabile, e siccome per mezzo di qualunque operazione algebraica le quantità non possono ricevere che esponenti costanti, le quantità esponenziali si devono riporre tra le trascendenti. Varie sono le specie delle quantità esponenziali, come a^x, y^x, a^{a^x}, y^{a^x}, y^{z^x} ec., secondochè è variabile il solo esponente, o anche la quantità elevata, o l'esponente medesimo è una quantità esponenziale. Consideriamo particolarmente la funzione a^x, il valor della quale dipende e dal valore di x,

e dalla grandezza della costante a. Perchè se $a=1$, sarà sempre $a^x=1$ qualunque valore si dia ad x; ma se $a>1$, il valore di a^x crescerà al crescere di x, finchè posta $x=\infty$ (con questa caratteristica s'indica un valore infinito, o sia maggiore di qualunque quantità data) anche a^x diventerà infinita. Posta $x=0$, sarà $a^x=1$, e se x diventa <0, o sia negativa, il valore di a^x andrà sempre decrescendo, finchè posta $x=-\infty$ diventerà $a^x=0$. L'opposto avviene se $a<1$, ma in ambedue i casi il valore di a^x non diventa mai negativo.

Sia dunque $y=a^x$, sarà y una funzione di x, e qualunque valore si dia ad x, ne nascerà un valore determinato di y. È chiaro che sarà $y^2=a^{2x}$, $y^3=a^{3x}$, ed in generale $y^n=a^{nx}$, e presi per n dei valori fratti o negativi sarà

$$\sqrt{y}=a^{\frac{1}{2}x},\ \sqrt[3]{y}=a^{\frac{1}{3}x},\ \frac{1}{y}=a^{-x},\ \frac{1}{y^2}=a^{-2x},\ \frac{1}{y^3}=a^{-3x},$$

$\frac{1}{\sqrt{y}}=a^{-\frac{1}{2}x}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}=a^{-\frac{2}{3}x}$, ec. Inoltre se avremo anche $u=a^z$, sarà $yu=a^{x+z}$, $\frac{y}{u}=a^{x-z}$.

68.

Siccome dato qualunque valore di x si può trovare il valore corrispondente di y; così ad un dato valore di y corrisponderà un valore di x tale, che sia $a^x=y$. Questo valore di x si chiama il logaritmo di y, e si denota così, log. y; onde se avremo ancora $a^z=u$, sarà $z=$ log. u. La quantità costante a si chiama la *base* de' logaritmi, determinata la qual base il logaritmo di un numero y è quell' esponente x della potestà a^x, il quale rende $a^x=y$. Qualunque numero però si prenda per la base a, sarà sempre log. $1=0$; poichè se nell' equazione $a^x=y$

ponghiamo $y=1$, dovrà essere $x=\log.1=0$. Se a sarà >1, i logaritmi de'numeri maggiori dell' unità saranno positivi; così $\log. a=1$, $\log. a^2=2$, $\log. a^3=3$, ec. Onde se non conosceremo la base a, potremo determinarla dal sapere, che il di lei logaritmo dev'essere eguale all' unità. I logaritmi de'numeri minori dell' unità sono negativi; così $\log. \frac{1}{a}=-1$, $\log. \frac{1}{a^2}=-2$, ec. Il contrario avviene, quando la base a è minore dell'unità.

Posto $\log. y=x$, sarà $\log. y^2=2x$, $\log. y^3=3x$, e generalmente $\log. y^n=nx=n\log. y$, cioè il logaritmo di una potenza y^n è eguale al logaritmo di y moltiplicato per l'esponente n; e quindi $\log. \sqrt[n]{y}=\frac{1}{n}\log. y$, $\log. \frac{1}{\sqrt[n]{y}}=\frac{-1}{n}\log. y$. Inoltre se $\log. y=x$, e $\log. u=z$, siccome $y=a^x$, ed $u=a^z$, avremo $\log. yu=x+z=\log. y+\log. u$, cioè il logaritmo di un prodotto è eguale alla somma de'logaritmi de'fattori: e similmente $\log. \frac{y}{u}=x-z=\log. y-\log. u$, cioè il logaritmo di una frazione è eguale alla differenza de'logaritmi del numeratore e del denominatore.

Apparisce dalle cose precedenti, che alcun numero non ha logaritmo razionale, eccettuati quei che sono potenze della base a. Se adunque il numero b non è potestà della base a, egli non avrà logaritmo razionale; ma non lo avrà neppure irrazionale, perchè chiamato p questo logaritmo irrazionale sarebbe $a^p=b$, lo che non è possibile se i numeri a e b sono razionali. I logaritmi adunque non potendosi in generale esprimere nè razionalmente nè irrazionalmente, si pongono a ragione tra le quantità trascendenti. Ma siccome i logaritmi sono di un grande uso per abbreviare i computi, perciò è stata cura di alcuni lo esprimerne il valore per approssimazione, e con incredibile fatica da *Brigg* ed *Ulacq* sono state formate le tavole de'logaritmi per la base 10. Il loro metodo era appoggiato ai seguenti principj: posto $\log. y=x$, e $\log. u=z$, sarà $\log. \sqrt{yu}=\frac{x+z}{2}$; onde se un numero dato b è compreso tra i limiti per esempio a^2 e

a^3, che hanno i logaritmi 2 e 3, preso il medio proporzionale $a^2\sqrt{a}$ tra a^2 ed a^3, del qual medio proporzionale il logaritmo è $\frac{5}{2}$, il numero b sarà contenuto tra a^2 ed $a^2\sqrt{a}$, o tra $a^2\sqrt{a}$ ed a^3. Nell'uno o nell'altro di questi casi si prenda di nuovo il medio proporzionale, ed i limiti diventeranno sempre più vicini, finchè poi finalmente la loro differenza si farà minore di qualunque data quantità, ed il numero proposto si confonderà con i limiti. E come per ciò che abbiamo detto son dati i logaritmi de' limiti, si troverà anche il logaritmo del numero dato b.

Poichè tanti sono i sistemi de' logaritmi, quanti diversi valori può prendere a, e ne può prendere infiniti, perciò i sistemi logaritmici sono infiniti. Ma dai logaritmi computati per un dato sistema si possono facilmente dedurre i logaritmi per qualunque altro sistema. Sia la base di un sistema $=a$, dell'altro $=b$, ed il logaritmo di un numero qualunque n sia nel primo sistema $=p$, nel secondo $=q$; sarà $a^p=n$, $b^q=n$, e quindi $a^{\frac{p}{q}}=b$. Perciò la frazione $\frac{p}{q}$ ha un valore costante, cioè sta p a q in un rapporto costante, qualunque sia il numero n. Così dai logaritmi computati per la base 10 si potranno dedurre i logaritmi per qualunque altra base, per esempio per la base 2: essendo per la base 10, log. $2=0,3010300$, e per la base 2, log. $2=1$, sarà $p:q=0,3010300:1$, onde $q=\frac{p}{0,3010300}=$ $3,3219277 \cdot p$. Se dunque i logaritmi comuni si moltiplicano per 3, 3219277, ne verranno i logaritmi per la base 2.

Essendo p e q come sopra, siano r ed s i logaritmi di un'altro numero m, il primo per la base a, il secondo per la base b; e siccome le frazioni $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ hanno il medesimo valore, starà $p:r=q:s$; onde in qualunque sistema i logaritmi di due numeri hanno tra loro il medesimo rapporto.

I logaritmi sono di un grandissimo uso ne'calcoli numerici; infatti col loro mezzo la moltiplicazione e la divisione si cangiano in somma e in sottrazione. Se per esempio sarà data la

quantità $\frac{a^3 b\sqrt{c}}{e\sqrt[3]{a.\sqrt[4]{c^3 d^2}}}$, il di lei valore si troverà comodamente così: presi i logaritmi avrassi $3\log.a+\log.b+\frac{1}{2}\log.c-\log.e-\frac{1}{3}\log.a-\frac{3}{4}\log.c-\frac{1}{2}\log.d$, alla qual somma di logaritmi se si cercherà nelle tavole il numero corrispondente, egli sarà il valore della formula precedente.

Dai logaritmi dipende la risoluzione dell' equazioni esponenziali. Così se abbiamo l' equazione $c^x=b$, prendendo i logaritmi avremo $x\log.c=\log.b$, e perciò $x=\frac{\log.b}{\log.c}$, e qui possiamo servirci di qualunque sistema, perchè $\frac{\log.b}{\log.c}$ ha in tutti il medesimo valore. Così ancora se fosse data l'equazione $c^{e^x}=b$, avremmo primieramente $e^x\log.c=\log.b$, e prendendo di nuovo i logaritmi $x\log.e+\log.\log.c=\log.\log.b$, e quindi

$$x=\frac{\log.\log.b-\log.\log.c}{\log.e}=\frac{\log.\frac{\log.b}{\log.c}}{\log.e},$$ e così delle altre.

I logaritmi comuni, che hanno la base $=10$, sono sopra gli altri sistemi molto utili per ciò, che diremo. Qualunque logaritmo è composto di un numero intero, che si chiama *Caratteristica*, e di una frazione decimale, che si dice *Mantissa*. Ora siccome i logaritmi de' numeri contenuti tra 0 e 10 son compresi tra 0 ed 1, la loro Caratteristica sarà 0; e similmente i logaritmi de' numeri compresi tra 10 e 100 avranno la Caratteristica $=1$; ed in generale la Caratteristica sarà di una unità minore del numero delle cifre, che compongono il numero dato. Onde dal logaritmo dato si conoscerà subito di quante cifre è composto il numero che gli corrisponde, e se la Mantissa mantenendosi la medesima si accrescerà la Caratteristica, il numero corrispondente verrà tante volte a moltiplicarsi per 10, quanta è la differenza delle Caratteristiche. Così ai logaritmi 3,9130187, e 6,9130187 convengono i numeri 8185, ed 8185000, ed ai logaritmi 2,9130187, e 0,9130187 corrispondono i nume-

rì 818,5, ed 8,185. Dalla Mantissa adunque si conosceranno le cifre che compongono il numero, e la Caratteristica ci mostrerà, quali di queste cifre si devono porre tra i numeri interi. Così dato il logaritmo 2,7603429, la Mantissa ci dà le cifre 5758945, e la Caratteristica determina questo numero ad essere 575,8945.

CAPITOLO III.

Delle quantità trascendenti che dipendono dal cerchio.

69.

Prendiamo adesso a considerare un'altra specie di quantità trascendenti, le quali traggono la loro origine dal cerchio. Sia dato il circolo BFL (*Fig.* 1), il di cui raggio supporremo sempre $=1$, e la mezza circonferenza $BFL=p$, e si prenda un arco qualunque $BC=x$, poi dai punti C e B si tirino le rette CD, BE perpendicolari al diametro BL, e dal centro A la retta AC, che passi per C, ed incontri in E la perpendicolare BE: le rette CD, AD, BE, AE si chiamano respettivamente il *seno*, il *coseno*, la *tangente*, la *secante* dell'arco $BC=x$, e si denotano così; $CD=\text{sen.}\,x$, $AD=\cos.\,x$, $BE=\text{tang.}\,x$, $AE=\sec.\,x$. Posto ciò è chiaro primieramente che $\overline{\text{sen.}\,x}^2+\overline{\cos.\,x}^2=1$, qualunque sia l'arco x, poichè $\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2$. Inoltre i triangoli simili ADC, ABE ci danno $AD:CD=AB:BE$, $AD:AC=AB:AE$, cioè $\cos.\,x:\text{sen.}\,x=1:\text{tang.}\,x$, $\cos.\,x:1=1:\sec.\,x$; onde si deduce tang. $x=\frac{\text{sen.}\,x}{\cos.\,x}$ e $\sec.\,x=\frac{1}{\cos.\,x}$. Se l'arco x è $<\frac{1}{2}p$, cioè minore della quarta parte della periferia, il di lui seno e coseno sono positivi: ma se x è contenuto tra i limiti $\frac{1}{2}p$, e p, in modo che sia $x>\frac{1}{2}p$, e $<p$, allora il seno sarà positivo, ma il coseno negativo perchè voltato in parte contraria: se x avrà per limiti p, e $\frac{3}{2}p$, tanto il seno che il coseno sarà negativo; e finalmente se x è contenuto tra $\frac{3}{2}p$, e $2p$, il seno sarà negativo, ed il

coseno positivo. Tutto questo è evidente dalla figura, ed inoltre chiaramente apparisce, che se l'arco x mantenendo il suo valore diventa negativo, il seno manterrà il suo valore ma sarà negativo, il coseno poi sarà positivo; cosicchè avremo $\text{sen.}-x=-\text{sen.}\,x$, e $\cos.-x=\cos.\,x$.

Sia F il punto che divide la mezza circonferenza BFL in parti eguali, cioè sia l'arco $BF=\frac{1}{2}p$, e condotta la tangente FG, che incontri in G la secante AE, chiameremo FG la *cotangente* dell'arco BC, ed AG la *cosecante* del medesimo arco. Tirata CH perpendicolare al raggio AF è evidente dalla figura, che $\cos.\,x=\text{sen.}\left(\frac{1}{2}p-x\right)$, e $\text{sen.}\,x=\cos.\left(\frac{1}{2}p-x\right)$; di più i triangoli simili AFG, ADC ci danno $\cot.x=\frac{\cos.\,x}{\text{sen.}x}=\frac{1}{\text{tang.}\,x}$, e $\text{cosec.}\,x=\frac{1}{\text{sen.}\,x}$. Se adesso facciamo $x=\frac{1}{2}p$, sarà $\text{sen.}\frac{1}{2}p=1$, $\cos.\frac{1}{2}p=0$, $\text{tang.}\frac{1}{2}p=\frac{1}{0}=\infty$, $\text{sec.}\frac{1}{2}p=\infty$, $\cot.\frac{1}{2}p=0$, $\text{cosec.}\frac{1}{2}p=1$. Se $x=p$, sarà $\text{sen.}\,p=0$, $\cos.\,p=-1$, $\text{tang.}\,p=0$, $\text{sec.}p=-1$, $\cot.p=-\infty$, $\text{cosec.}p=\infty$. Se $x=\frac{3}{2}p$, sarà $\text{sen.}\frac{3}{2}p=-1$, $\cos.\frac{3}{2}p=0$, $\text{tang.}\frac{3}{2}p=-\infty$, $\text{sec.}\frac{3}{2}p=-\infty$, $\cot.\frac{3}{2}p=0$, $\text{cosec.}\frac{3}{2}p=-1$. Se finalmente $x=2p$, sarà $\text{sen.}2p=0$, $\cos.\,2p=1$, $\text{tang.}\,2p=0$, $\text{sec.}\,2p=1$, $\cot.\,2p=\infty$, $\text{cosec.}\,2p=\infty$. Quindi apparisce che tutti i seni e coseni sono contenuti tra i limiti $+1$ e -1. Sia adesso $x=\frac{1}{4}p=45°$, ed a motivo dell'angolo BAC semiretto sarà $CD=AD$, cioè $\text{sen.}\,x=\cos.\,x$, e quindi $2\overline{\text{sen.}x}^2=1$, e $\text{sen.}x=\cos.x=\frac{1}{\sqrt{2}}$; nel medesimo caso la tangente sarà $=1$. Se $x=\frac{1}{3}p=60°$, condotta la retta BC sarà il triangolo ACB equilatero, e perciò il raggio AB sarà diviso per mezzo in D, cioè sarà $\cos.\,x=\frac{1}{2}$, e l'equazione $\overline{\text{sen.}x}^2+\overline{\cos.x}^2=1$ ci darà $\text{sen.}x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dati i seni ed i coseni di due archi y ed x si debba adesso trovare il seno ed il coseno della loro somma. Sia (*Fig.* 2) l'arco $BC=y$, $CE=x$, e tirate le rette CD, EH perpendicolari al raggio AB, ed EF perpendicolare al raggio AC sia G il punto d'incontro delle rette AC, EH, sarà $CD=\text{sen}.y$, $AD=\cos.y$, $EF=\text{sen}.x$, $AF=\cos.x$, $EH=EG+GH=\text{sen}.(y+x)$, $AH=\cos.(y+x)$. I triangoli simili EFG, CDA ci danno $EG:EF=AC:AD$, $FG:EF=CD:AD$, e quindi $EG=\frac{\text{sen}.x}{\cos.y}$, $FG=\frac{\text{sen}.y\times\text{sen}.x}{\cos.y}$, ed $AG=AF-FG=\frac{\cos.y\times\cos.x-\text{sen}.y\times\text{sen}.x}{\cos.y}$. Ma dai triangoli simili AGH, ACD abbiamo $AH:AG=AD:AC$, $GH:AG=CD:AC$; sarà dunque

$AH=AG\times\cos.y=\cos.y\times\cos.x-\text{sen}.y\times\text{sen}.x$,

$$GH=AG\times\text{sen}.y=\frac{\text{sen}.y\times\cos.y\times\cos.x-\text{sen}.y^2\times\text{sen}.x}{\cos.y},$$ ed

$$EH=EG+GH=\text{sen}.y\times\cos.x+\frac{\text{sen}.x(1-\text{sen}.y^2)}{\cos.y}$$

$=\text{sen}.y\times\cos.x+\text{sen}.x\times\cos.y$. Onde avremo

$\text{sen}.(y+x)=\text{sen}.y\times\cos.x+\text{sen}.x\times\cos.y$, e

$\cos.(y+x)=\cos.y\times\cos.x-\text{sen}.y\times\text{sen}.x$.

Ponghiamo in queste formule $y-x$ in luogo di y, ed avremo

$$\text{sen}.y=\text{sen}.(y-x)\times\cos.x+\text{sen}.x\times\cos.(y-x)$$
$$\cos.y=\cos.(y-x)\times\cos.x-\text{sen}.x\times\text{sen}.(y-x).$$

Dalla prima equazione moltiplicata per $\cos.x$ si sottragga la seconda moltiplicata per $\text{sen}.x$, e si avrà

$$\text{sen}.y\times\cos.x-\text{sen}.x\times\cos.y=\text{sen}.(y-x).$$

Ora alla prima moltiplicata per $\text{sen}.x$ si aggiunga la seconda moltiplicata per $\cos.x$, e si otterrà

$$\cos.y\times\cos.x+\text{sen}.y\times\text{sen}.x=\cos.(y-x).$$

Queste formule, che ci danno il seno ed il coseno della differenza di due archi, possono subito dedursi dalle prime, se si osserva, che cangiata x in $-x$, il seno diventa negativo, ed il coseno si mantiene lo stesso.

Se supponghiamo y successivamente $=\frac{1}{2}p, p, \frac{3}{2}p, 2p$, avremo

$$\text{sen.}\left(\frac{1}{2}p+x\right)=\ \text{cos.}x \qquad \text{sen.}\left(\frac{1}{2}p-x\right)=\ \text{cos.}x$$

$$\text{cos.}\left(\frac{1}{2}p+x\right)=-\text{sen.}x \qquad \text{cos.}\left(\frac{1}{2}p-x\right)=\ \text{sen.}x$$

$$\text{sen.}\ (p+x)=-\text{sen.}x \qquad \text{sen.}\ (p-x)=\ \text{sen.}x$$

$$\text{cos.}\ (p+x)=-\text{cos.}x \qquad \text{cos.}\ (p-x)=-\text{cos.}x$$

$$\text{sen.}\left(\frac{3}{2}p+x\right)=-\text{cos.}x \qquad \text{sen.}\left(\frac{3}{2}p-x\right)=-\text{cos.}x$$

$$\text{cos.}\left(\frac{3}{2}p+x\right)=\ \text{sen.}x \qquad \text{cos.}\left(\frac{3}{2}p-x\right)=-\text{sen.}x$$

$$\text{sen.}\ (2p+x)=\ \text{sen.}x \qquad \text{sen.}\ (2p+x)=-\text{sen.}x$$

$$\text{cos.}\ (2p+x)=\ \text{cos.}x \qquad \text{cos.}\ (2p-x)=\ \text{cos.}x\ .$$

E se si riflette, che è sempre $\text{sen.}2np=0$, e $\text{cos.}2np=1$, qualunque numero intero positivo o negativo si prenda per n, si troverà essere

$$\text{sen.}\left(\frac{4n+1}{2}p\pm x\right)=\ \text{cos.}x$$

$$\text{cos.}\left(\frac{4n+1}{2}p\pm x\right)=\mp\text{sen.}x$$

$$\text{sen.}\left(\frac{4n+2}{2}p\pm x\right)=\mp\text{sen.}x$$

$$\text{cos.}\left(\frac{4n+2}{2}p\pm x\right)=-\text{cos.}x$$

$$\text{sen.}\left(\frac{4n+3}{2}p\pm x\right)=-\text{cos.}x$$

$$\text{cos.}\left(\frac{4n+3}{2}p\pm x\right)=\pm\text{sen.}x$$

$$\text{sen.}\left(\frac{4n+4}{2}p\pm x\right)=\pm\text{sen.}x$$

$$\text{cos.}\left(\frac{4n+4}{2}p\pm x\right)=\ \text{cos.}x\ .$$

Se nei valori di $\text{sen.}(y+x)$ e di $\text{cos.}(y+x)$ facciamo $y=x$, avremo

$$\text{sen.}2x=2\text{sen.}x\times\text{cos.}x$$

$$\text{cos.}2x=\overline{\text{cos.}x}^2-\overline{\text{sen.}x}^2=2\overline{\text{cos.}x}^2-1\ .$$

Similmente se ponghiamo $y=2x$, otterremo

$$\text{sen.}3x=\text{sen.}2x\times\text{cos.}x+\text{sen.}x\times\text{cos.}2x=3\text{sen.}x\times\overline{\text{cos.}x}^2-\overline{\text{sen.}x}^3$$

$$\text{cos.}3x=\text{cos.}2x\times\text{cos.}x-\text{sen.}2x\times\text{sen.}x=\overline{\text{cos.}x}^3-3\overline{\text{sen.}x}^2\times\text{cos.}x\ .$$

Nell'istesso modo si esprimeranno i seni ed i coseni degli archi multipli per i seni ed i coseni degli archi semplici, e sarà in generale

$$\text{sen.}\, nx = n\overline{\cos.x}^{\,n-1} \times \text{sen.}x - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}\overline{\cos.x}^{\,n-3} \times \overline{\text{sen.}x}^{\,3}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\overline{\cos.x}^{\,n-5} \times \overline{\text{sen.}x}^{\,5} - \text{ec.}$$

$$\cos.nx = \overline{\cos.x}^{\,n} - \frac{n(n-1)}{2}\overline{\cos.x}^{\,n-2} \times \overline{\text{sen.}x}^{\,2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,3\,.\,4}\overline{\cos.x}^{\,n-4} \times \overline{\text{sen.}x}^{\,4} - \text{ec.}$$

le quali formule in seguito si dimostreranno accuratamente.

Facendo $x = \frac{1}{2}y$ nei valori di $\text{sen.}(y-x)$, e di $\cos.(y-x)$, avremo

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}y = \text{sen.}y \times \cos.\tfrac{1}{2}y - \text{sen.}\tfrac{1}{2}y \times \cos.y$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}y = \cos.y \times \cos.\tfrac{1}{2}y + \text{sen.}y \times \text{sen.}\tfrac{1}{2}y\,.$$

Aggiungendo la prima equazione moltiplicata per $\cos.\frac{1}{2}y$ alla seconda moltiplicata per $\text{sen.}\frac{1}{2}y$ otterremo

$2\text{sen.}\frac{1}{2}y \times \cos.\frac{1}{2}y = \text{sen.}y$, cioè $\cos.\frac{1}{2}y = \frac{\text{sen.}y}{2\text{sen.}\frac{1}{2}y}$, il qual valore sostituito nella prima equazione ci darà

$$2\overline{\text{sen.}\tfrac{1}{2}y}^{\,2} = \overline{\text{sen.}y}^{\,2} - 2\overline{\text{sen.}\tfrac{1}{2}y}^{\,2} \times \cos.y\,.$$

onde si deduce $\text{sen.}\frac{1}{2}y = \frac{\text{sen.}y}{\sqrt{(2+2\cos.y)}} = \sqrt{\frac{1-\cos.y}{2}}$, e quindi $\cos.\frac{1}{2}y = \sqrt{\frac{1+\cos.y}{2}}$. Dato adunque il coseno di un arco si trova il seno ed il coseno della di lui metà.

Essendo la tangente eguale al seno diviso pel coseno, sarà

$$\text{tang.}(y+x) = \frac{\text{sen.}y \times \cos.x + \text{sen.}x \times \cos.y}{\cos.y \times \cos.x - \text{sen.}x \times \text{sen.}y} = \frac{\frac{\text{sen.}y}{\cos.y} + \frac{\text{sen.}x}{\cos.x}}{1 - \frac{\text{sen.}y}{\cos.y} \times \frac{\text{sen.}x}{\cos.x}}$$

$$=\frac{\text{tang}.y+\text{tang}.x}{1-\text{tang}.y\times\text{tang}.x};$$

e similmente

$$\text{tang}.(y-x)=\frac{\text{tang}.y-\text{tang}.x}{1+\text{tang}.y\times\text{tang}.x}.$$

Facendo nella prima formula $x=y$ avremo

$$\text{tang}.2y=\frac{2\text{tang}.y}{1-(\text{tang}y)^2},$$

e ponendo nella seconda $x=\frac{1}{2}y$ otterremo

$$\text{tang}.\frac{1}{2}y=\frac{\text{tang}.y-\text{tang}.\frac{1}{2}y}{1+\text{tang}.y\times\text{tang}.\frac{1}{2}y},$$

cioè

$$\text{tang}.\frac{1}{2}y+\text{tang}.y\times\left(\text{tang}.\frac{1}{2}y\right)^2=\text{tang}.y-\text{tang}.\frac{1}{2}y,$$

onde si deduce $\text{tang}.\frac{1}{2}y=\frac{\sqrt{(1+\overline{\text{tang}.y}^2)}-1}{\text{tang}.y}=\frac{1-\cos.y}{\text{sen}.y}=\frac{\text{sen}.y}{1+\cos.y}$, per mezzo delle quali espressioni dalla tangente data di un arco si trova la tangente dell'arco doppio, e della metà del medesimo arco. Se paragoniamo tra loro le formule precedenti, ne otterremo molte altre, che sono di un grandissimo uso nell'Analisi. Si veda l'*Introduzione* del Sig. *Euler*.

70.

A questi principj è appoggiato il calcolo de' triangoli, che qui brevemente esporremo. Si abbia in primo luogo un triangolo rettangolo ABC (Fig. 3.) e sia A l'angolo retto. Presa $CD=1$, si descriva con questo raggio un cerchio, il quale incontri in E il lato BC, e condotte ad AC le perpendicolari DG, EF, sarà $EF=\text{sen}.C$, (poichè l'angolo C, e l'arco DE misura di lui hanno il medesimo seno, coseno, ec.) $CF=\cos.C$, $DG=\text{tang}.C$. Ma i triangoli simili ABC, FEC, DGC ci danno $AB:AC=DG:DC$, $AB:BC=EF:EC$, $AC:CB=CF:CE$; quindi in qualunque triangolo rettangolo è sempre

$$\frac{AB}{BC}=\text{sen}.C=\cos.B,\ \frac{AC}{BC}=\cos.C=\text{sen}.B,\ \frac{AB}{AC}=\text{tang}.C=\cot.B.$$

Sia dato adesso un triangolo qualunque ABC (Fig. 4) e si tiri dal punto B la retta BD perpendicolare ad AC. Sarà $\frac{BD}{BC}=$sen.C, $\frac{BD}{AB}=$sen.A, e perciò sen.C : sen.$A=\frac{1}{BC}:\frac{1}{AB}$ $=AB:BC$, cioè in qualunque triangolo i lati sono come i seni degli angoli opposti. Inoltre sarà tang.$C=\frac{BD}{CD}$; ma $\frac{BD}{AB}=$sen.A, $\frac{AD}{AB}=$cos.A, e perciò $BD=AB\times$sen.A, $AC-CD=AB$cos.A: sarà dunque tang.$C=\frac{AB\times \text{sen.}A}{AC-AB\times \text{cos.}A}$. Finalmente abbiamo
$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AB}^2-\overline{AD}^2+(AC-AD)^2$
$=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2AC\times AD=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2AC\times AB\times$cos.$A$; onde sarà cos.$A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{CB}^2}{2AB\times AC}$. In queste poche linee è contenuto tutto ciò, che appartiene alla *Trigonometria rettilinea*.

CAPITOLO IV.

Della evoluzione delle funzioni in Serie.

71.

Allorchè la formula

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{ec.}$$

è composta di un numero finito di termini, rappresenta sempre una funzione intera di x. Ma se il numero dei termini è infinito, in tal caso può esprimere una funzione qualunque fratta, o irrazionale, o anche trascendente. Abbiamo già veduto che si potevano ridurre ad una serie infinita i radicali di qualunque denominazione: adesso insegneremo a svolgere in serie le funzioni fratte, e le funzioni trascendenti che dipendono dai logaritmi e dal circolo. Prima però si osservi, che data l'equazione

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.}=a+bx+cx^2+dx^3+\text{ec.}$$

ove x è una quantità variabile, ed A, a, B, b, ec. quantità costanti, sarà sempre $A=a$, $B=b$, $C=c$, $D=d$, ec., cioè saranno eguali tra loro i coefficienti della medesima potenza di x. Poichè dovendo l'equazione data aver luogo qualunque sia il va-

lore di x, sussisterà anche quando $x=0$, cioè sarà $A=a$. Si tolgano da una e dall'altra parte le quantità eguali A, a, e l'equazione divisa per x diventerà

$$B+Cx+Dx^2+\text{ec.}=b+cx+dx^2+\text{ec.}$$

e col medesimo discorso dimostreremo che $B=b$; e così in seguito.

Ciò posto sia data in primo luogo la funzione fratta $\frac{a}{m+nx}$, e ponghiamo

$$\frac{a}{m+nx}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{ec.}$$

ove A, B, C, ec. sono quantità costanti. Moltiplicando per $m+nx$ avremo

$$a=Am+Bmx+Cmx^2+Dmx^3+Emx^4+\text{ec.}$$
$$+Anx+Bnx^2+Cnx^3+Dnx^4+\text{ec.}$$

e quindi sarà $Am=a$, cioè $A=\frac{a}{m}$, e le altre quantità B, C, ec. si determineranno con fare $=0$ i coefficienti di ciascuna potestà di x; onde avremo

$$mB+nA=0$$
$$mC+nB=0$$
$$mD+nC=0$$
$$\text{ec.}$$

Pertanto qualunque coefficiente Q si conosce dal precedente P, poichè è sempre $mQ+nP=0$, cioè $Q=-\frac{nP}{m}$. Sarà dunque $B=-\frac{an}{m^2}$, $C=\frac{an^2}{m^3}$, ec., e

$$\frac{a}{m+nx}=\frac{a}{m}-\frac{an}{m^2}x+\frac{an^2}{m^3}x^2-\frac{an^3}{m^4}x^3+\text{ec.};$$

la qual serie si chiama *geometrica*, perchè qualunque termine sta al seguente nel rapporto costante di $1:-\frac{nx}{m}$.

Viceversa se sarà data la serie infinita

$$R=\frac{a}{m}+\frac{an}{m^2}x+\frac{an^2}{m^3}x^2-\frac{an^3}{m^4}x^3+\text{ec.}$$

sarà $R=\frac{a}{m-nx}$; questa espressione si chiama la *somma* della serie. Se si volesse la somma della serie fino al termine

$$\frac{a+bx+\text{ec.}}{x^2(m+nx+rx^2+\text{ec.})}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+C+Dx+\text{ec.}$$

ed in generale

$$\frac{a+bx+\text{ec.}}{x^p(m+nx+rx^2+\text{ec.})}=\frac{A}{x^p}+\frac{B}{x^{p-1}}+\frac{C}{x^{p-2}}+\text{ec.}$$

72.

Abbiamo veduto che le funzioni irrazionali si riducono in serie per mezzo del Teorema *Nevvtoniano*: non ci rimane adunque per questa parte, che a dimostrare il medesimo teorema, che allora abbiamo per induzione dai casi particolari dedotto. Ponghiamo adunque

$$(1+x)^n=1+Ax+Bx^2+Cx^3+\text{ec.}$$

ed avremo

$$(1+x)^{2n}=1+2Ax+A^2x^2+2Cx^3+\text{ec.}$$
$$+2Bx^2+2ABx^3+\text{ec.}$$

Ma $(1+x)^{2n}=(1+2x+x^2)^n$; onde ponendo $2x+x^2$ in luogo di x nel valore di $(1+x)^n$ avremo ancora in altra forma

$$(1+x)^{2n}=1+2Ax+\ Ax^2+4Bx^3+\text{ec.}$$
$$+4Bx^2+8Cx^3+\text{ec.}$$

Se paragoniamo tra loro questi due valori di $(1+x)^{2n}$ otterremo $A^2+2B=A+4B$, $2C+2AB=4B+8C$, ec. o sia $B=\frac{A(A-1)}{2}$, $C=\frac{B(A-2)}{2}$, ec. Resta a determinarsi il valore di A; ma essendo $(1+x)^n=1+Ax+\text{ec.}$ ed $(1+x)^{2n}=1+2Ax+\text{ec.}$, è chiaro il valore di A essere una funzione tale di n, che diventa doppia, quando si prende $2n$ invece di n. Sia dunque $A=a+bn+cn^2+dn^3+\text{ec.}$, e sarà $2A=a+2bn+4cn^2+8dn^3+\text{ec.}$ $=2a+2bn+2cn^2+2dn^3+\text{ec.}$; onde $a=c=d=\text{ec.}=0$, ed $A=bn$. La costante b si determinerà se si rifletta, che posta $n=1$, è $1+x=1+bx$, e perciò $b=1$, ed $A=n$. Sarà dunque

$$A = n$$

$$B = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$$

ec.

e quindi

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} x^3 + \text{ec.}$$

Ponendo $x = \frac{b}{a}$, ne verrà

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = 1 + n\frac{b}{a} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \text{ec.}$$

e moltiplicando per a^n

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \text{ec.}$$

come abbiamo insegnato di sopra.

Abbiamo uno dopo l'altro determinati i coefficienti A, B, C, ec., e ne abbiamo dedotto per induzione, che la medesima legge ha luogo anche ne' termini seguenti. Per toglierci ogni dubbio sopra di ciò si rifletta, che il valore di A è $= n$, e quando n è un numero intero positivo, e quando n è qualunque. Gli altri coefficienti B, C, ec. sono determinati dalle stesse equazioni tanto in un caso, che nell'altro; e quindi saranno sempre della medesima forma. Pertanto, siccome la continuazione della legge è stata dimostrata, allorchè n è numero intero e positivo, essa avrà luogo egualmente, qualunque sia il valore di n.

73.

Passiamo alla evoluzione in serie delle funzioni trascendenti, ed in primo luogo parlando de' logaritmi cerchiamo una serie infinita, che esprima il valore di $\log.(1+x)$. Sia

$$\log.(1+x) = kx + lx^2 + mx^3 + nx^4 + \text{ec.}$$

ove è stato omesso il termine costante, perchè essendo $\log. 1 = 0$, la serie deve svanire quando $x = 0$. Se adesso ponghiamo $2x + x^2$ in luogo di x, avremo

$$\log.(1+2x+x^2)=2kx+\;kx^2+4lx^3+\;\;lx^4+\text{ec.}$$
$$+4lx^2+8mx^3+12mx^4+\text{ec.}$$
$$+16nx^4+\text{ec.}$$

Ma $\log.(1+2x+x^2)=\log.(1+x)^2=2\log.(1+x)$; quindi avremo in altra forma

$$\log.(1+2x+x^2)=2kx+2lx^2+2mx^3+2nx^4+\text{ec.}$$

Dal paragone di queste due espressioni ne dedurremo $k+2l=0$, $4l+6m=0$, $l+12m+14n=0$, ec., cioè $l=-\frac{k}{2}$, $m=\frac{k}{3}$, $n=-\frac{k}{4}$, e quindi

$$\log.(1+x)=k\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\text{ec.}\right),$$

ove k resta indeterminata per esprimere gl'infiniti sistemi di logaritmi.

Posta $-x$ in luogo di x sarà

$$\log.(1-x)=-k\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\text{ec.}\right)$$

e $\log.\frac{1+x}{1-x}=\log.(1+x)-\log.(1-x)=2k\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\text{ec.}\right)$.

Se facciamo $k=1$, avremo quei logaritmi, che si chiamano *naturali*, o *iperbolici*, i quali saranno così espressi:

$$\log.(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\text{ec.}$$
$$\log.(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\text{ec.}\right)$$
$$\log.\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\text{ec.}\right).$$

Vediamo adesso, come dalla base a dipenda il numero k. Essendo $\log.a=1$, se facciamo $1+x=a$, avremo

$$1=k\left(a-1-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\text{ec.}\right).$$

Per ottenere adunque il valore di k, che conviene ai logaritmi comuni, dovremo fare $a=10$, onde verrà

$$\frac{1}{k}=9-\frac{9^2}{2}+\frac{9^3}{4}-\frac{9^4}{4}+\text{ec.}$$

Ma essendo questa serie divergente, cioè i di lei termini andando crescendo, non ce ne possiamo servire per determinare il va-

lor di k. Facciamo perciò $\frac{1+x}{1-x}=a$, ed avremo $x=\frac{a-1}{a+1}$, e quindi

$$\frac{1}{k}=2\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5}+\text{ec.}\right),$$

e ponendo $a=10$

$$\frac{1}{k}=2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3.11^3}+\frac{9^5}{5.11^5}+\text{ec.}\right),$$

i termini della qual serie vanno sensibilmente decrescendo, e però sommandone alcuni troveremo il valor prossimo di k, e sarà $\frac{1}{k}=2,30258$, e $k=0,43429$.

Sia y il logaritmo iperbolico del numero $1+x$, ed u il logaritmo del medesimo numero per la base a; sarà

$$y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{ec.}$$
$$u=k\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{ec.}\right).$$

Quindi $u=ky$, e $k=\frac{u}{y}$; onde il numero k per la base a è eguale al logaritmo di qualunque numero in questa base diviso pel logaritmo iperbolico del medesimo numero. Se dunque facciamo questo numero $=a$, sarà $u=1$, e k eguale all'unità divisa pel logaritmo iperbolico della base a. Trovato una volta questo numero k, se tutti i logaritmi iperbolici si moltiplicheranno per esso, ne nasceranno i logaritmi per la base a.

Si debba adesso svolgere in serie la quantità esponenziale c^x. Ponghiamo

$$c^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+\text{ec.}$$

e sarà posto $2x$ in luogo di x

$$c^{2x}=1+2Ax+4Bx^2+8Cx^3+\text{ec.}$$

Ma $c^{2x}=\left(c^x\right)^2=1+2Ax+A^2x^2+\ 2Cx^3+\text{ec}:$
$\qquad\qquad +2Bx^2+2ABx^3+\text{ec.}$

onde paragonando i termini di queste serie eguali troveremo $2B=A^2$, $6C=2AB$, ec.; cioè $B=\frac{A^2}{2}$, $C=\frac{A^3}{2.3}$, ec. Rimane però indeterminato il valore di A: per determinarlo si prendano i lo-

garitmi di c^x, e della serie che rappresenta questa quantità, ed avrassi

$$\begin{aligned} x\log.c=\log.(1+Ax+Bx^2+Cx^3+\text{ec.}) &= kAx+kBx^2+kCx^3+\text{ec.} \\ &\quad -\frac{kA^2}{2}x^2-\frac{2kAB}{2}x^3+\text{ec.} \\ &\quad +\frac{kA^3}{3}x^3+\text{ec.} \end{aligned}$$

onde si deduce $\log.c=kA$, cioè $A=\frac{\log.c}{k}$, e quindi

$$c^x=1+\frac{\log.c}{k}x+\frac{\overline{\log.c}^2}{k^2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{\overline{\log.c}^3}{k^3}\cdot\frac{x^3}{2.3}+\text{ec.}$$

Se c è eguale alla base a de' logaritmi che si prendono; sarà $\log.c=1$, ed avremo

$$a^x=1+\frac{x}{k}+\frac{x^2}{2k^2}+\frac{x^3}{2.3k^3}+\text{ec.},$$

e facendo $x=1$

$$a=1+\frac{1}{k}+\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{2.3k^3}+\text{ec.}$$

per mezzo della qual serie dato il numero k si potrà ritrovare la corrispondente base a.

Se a è la base de' logaritmi iperbolici, che in seguito chiameremo sempre e, a motivo di $k=1$, sarà

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\text{ec.},$$

onde si ricava $e=2,718281$. Inoltre sarà

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+\text{ec.}$$

e similmente

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}-\text{ec.};$$

e quindi

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}+\text{ec.}$$

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}+\text{ec.}$$

74.

Dalle funzioni logaritmiche ed esponenziali venghiamo a quelle, che dipendono dal cerchio, e primieramente cerchiamo le serie, che esprimono il seno ed il coseno di un' arco x. Ponghiamo a quest' oggetto

$$\text{sen.}x = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + \text{ec.}$$
$$\cos.x = 1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + \text{ec.}$$

Nella prima serie abbiamo omesse le potestà pari di x, perchè, essendo $\text{sen.}-x = -\text{sen.}x$, se facciamo x negativa, deve diventar negativa anche la serie, all' opposto nella seconda abbiamo tralasciate le potenze dispari, perchè posto $-x$ in luogo di x la serie deve rimaner la stessa, giacchè $\cos.-x = \cos.x$. Sarà pertanto

$$\begin{aligned}\overline{\text{sen.}x}^2 + \overline{\cos.x}^2 = 1 = 1 &+ 2Ax^2 + A^2x^4 + 2Cx^6 + \text{ec.}\\ &+ a^2x^2 + 2Bx^4 + 2ABx^6 + \text{ec.}\\ &+ 2abx^4 + b^2x^6 + \text{ec.}\\ &+ 2acx^6 + \text{ec.}\end{aligned}$$

onde si ricavano l'equazioni, $2A + a^2 = 0$, $A^2 + 2B + 2ab = 0$, $2C + 2AB + b^2 + 2ac = 0$, ec. Così pure sarà

$$\begin{aligned}2\text{sen.}x \times \cos.x = \text{sen.}2x &= 2ax + 8bx^3 + 32cx^5 + 128dx^7 + \text{ec.}\\ &= 2ax + 2bx^3 + 2cx^5 + 2dx^7 + \text{ec.}\\ &+ 2Aax^3 + 2Abx^5 + 2Acx^7 + \text{ec.}\\ &+ 2Bax^5 + 2Bbx^7 + \text{ec.}\\ &+ 2Cax^7 + \text{ec.}\end{aligned}$$

e quindi $6b - 2Aa = 0$, $30c - 2Ab - 2Ba = 0$, $126d - 2Ac - 2Bb - 2Ca = 0$, ec. Da queste e dall'equazioni precedenti deduciamo

$$A = -\frac{a^2}{2},\ b = -\frac{a^3}{2.3},\ B = \frac{a^4}{2.3.4},\ c = \frac{a^5}{2.3.4.5},\ C = -\frac{a^6}{2.3.4.5.6},\ \text{ec.}$$

Se l' arco x è piccolissimo, si confonde col suo seno, cioè $\text{sen.}x = x$; ma nella serie supposta $\text{sen.}x = ax$, dunque $a = 1$, e quindi

$$\text{sen.}x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{ec.}$$
$$\cos.x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \text{ec.}$$

Ponghiamo $\text{tang.}x = x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + \text{ec.}$ e come la tangente è eguale al seno diviso pel coseno, avremo

$$x+Ax^3+Bx^5+Cx^7+\text{ec.}=\frac{x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-\text{ec.}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3.4.5.6}+\text{ec.}}$$

e moltiplicando

$$\begin{array}{l}
x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2.3.4}-\frac{x^7}{2.3.4.5.6}+\text{ec.}=x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-\text{ec.}\\
+Ax^3-\frac{Ax^5}{2}+\frac{Ax^7}{2.3.4}-\text{ec.}\\
\quad +Bx^5-\frac{Bx^7}{2}+\text{ec.}\\
\qquad +Cx^7-\text{ec.}
\end{array}$$

onde si deduce $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{2}{15}$, $C=\frac{17}{315}$, ec., e

$$\text{tang.}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\text{ec.}$$

La legge dei coefficienti A, B, C, ec. è la seguente,

$$\begin{array}{l}
A=\frac{1}{3}\\
B=\frac{A}{2}-\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}\\
C=\frac{B}{2}-\frac{A}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.6}-\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\\
\qquad\text{ec.}
\end{array}$$

Abbiamo veduto, come le funzioni di cerchio si esprimano per gli archi; mostriamo adesso come gli archi viceversa si esprimano per le loro funzioni. Sia t la tangente dell'arco x, e ponghiamo

$$x=t+At^3+Bt^5+Ct^7+\text{ec.}$$

sarà

$$2x=\frac{2t}{1-t^2}+\frac{8At^3}{(1-t^2)^3}+\frac{32Bt^5}{(1-t^2)^5}+\text{ec.}$$

perchè quando x diventa $2x$, in luogo di $t=\text{tang.}x$ si deve porre $\frac{2t}{1-t^2}=\text{tang.}2x$. Risolviamo in serie i termini $\frac{1}{1-t^2}$, $\frac{1}{(1-t^2)^3}$, ec; ed ordinando tutto per t avremo

$$\begin{array}{l}
2x=2t+2At^3+2Bt^5+\text{ec.}=2t+2t^3+2t^5+\text{ec.}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +8At^3+24At^5+\text{ec.}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +32Bt^5+\text{ec.}
\end{array}$$

cioè $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{1}{5}$, ec., ed

$$x=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\text{ ec.}$$

Se facciamo $x=\frac{p}{4}=$ all'arco di 45. gradi, avremo la serie *Leibniziana*

$$\frac{p}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{ ec.}$$

Ponendo $x=\frac{p}{6}=$ all'arco di 30. gradi, di cui la tangente $=\frac{1}{\sqrt{3}}$, otterremo una serie più convergente

$$\frac{p}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.3^2}-\frac{1}{7.3^3}+\frac{1}{9.3^4}-\text{ ec.}\right),$$

per mezzo della quale *Lagny* calcolò il valore di p con 127 decimali, le prime delle quali ci danno $p=3,141592$.

Con un metodo simile si potrà l'arco esprimere per le altre sue funzioni.

CAPITOLO V.

Della riduzione delle quantità immaginarie alla forma $A+B\sqrt{-1}$.

75.

Abbiamo già notato nella prima Parte, che qualunque quantità immaginaria ridur si poteva alla forma $A+B\sqrt{-1}$; adesso insegneremo ad eseguire questa riduzione. In primo luogo cerchiamo, come si esprima il logaritmo di una quantità immaginaria; e qui come in seguito, quando parleremo di logaritmi, intenderemo sempre i logaritmi iperbolici. Sia dunque proposto $\log.(a+b\sqrt{-1})=\log.a+\log.\left(1+\frac{b\sqrt{-1}}{a}\right)$, e riducendo questo in serie avremo

$$\log.\left(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)=\frac{b\sqrt{-1}}{a}+\frac{b^2}{2a^2}-\frac{b^3\sqrt{-1}}{3a^3}-\frac{b^4}{4a^4}$$
$$+\frac{b^5\sqrt{-1}}{5a^5}+\frac{b^6}{6a^6}-\text{ec.}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^4}{2a^4}+\frac{b^6}{3a^6}-\text{ec.}\right)$$
$$+\sqrt{-1}\left(\frac{b}{a}-\frac{b^3}{3a^3}+\frac{b^5}{5a^5}-\text{ec.}\right).$$

La prima parte di questa quantità è $=\frac{1}{2}\log.\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)$ (73), la seconda è $=\sqrt{-1}$ moltiplicata per l'arco, che ha $\frac{b}{a}$ per tangente (74). Chiamando dunque β quest'arco, avremo
$\log.(a+b\sqrt{-1})=\log.a+\frac{1}{2}\log.\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)+\beta\sqrt{-1}$
$=\log.\sqrt{(a^2+b^2)}+\beta\sqrt{-1}$, cioè lo avremo ridotto alla forma $A+B\sqrt{-1}$.

Essendo $\log.(a+b\sqrt{-1})^m=m\log.(a+b\sqrt{-1})$, sarà $\log.(a+b\sqrt{-1})^m=A+B\sqrt{-1}$ posta $A=m\log.\sqrt{(a^2+b^2)}$, $B=m\beta=$ all'arco, che diviso per m ha la tangente $=\frac{b}{a}$. Così, poichè $\log.(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=(m+n\sqrt{-1})\log.(a+b\sqrt{-1})$, sarà $\log.(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=A+B\sqrt{-1}$, se si pone $A=m\log.\sqrt{(a^2+b^2)}-n\beta$, $B=n\log.\sqrt{(a^2+b^2)}+m\beta$.

Viceversa la formula $A+B\sqrt{-1}$ si potrà ridurre alla forma $\log.(a+b\sqrt{-1})$. Abbiamo veduto essere $A=\log.\sqrt{(a^2+b^2)}$, $B=$ all'angolo che ha $\frac{b}{a}$ per tangente: quindi si ricava $e^A=\sqrt{(a^2+b^2)}$, o sia $a^2=e^{2A}-b^2$, e $\frac{b}{a}=\text{tang.}B$, cioè
$\frac{b^2}{e^{2A}-b^2}=\text{tang.}B^2$, onde $b=\frac{e^A\times\text{tang.}B}{\sqrt{(1+\text{tang.}B^2)}}=e^A\,\text{sen.}B$, ed
$a=\sqrt{\left(e^{2A}-e^{2A}\,\text{sen.}B^2\right)}=e^A\times\cos.B$. Sarà dunque $A+B\sqrt{-1}$
$=\log.\left(e^A\times\cos.B+\sqrt{-1}.e^A\times\text{sen.}B\right)$.

Se $A=0$, avremo $B\sqrt{-1}=\log.(\cos.B+\sqrt{-1}.\text{sen}.B)$, e perciò $e^{B\sqrt{-1}}=\cos.B+\sqrt{-1}.\text{sen}.B$; similmente $e^{-B\sqrt{-1}}=\cos.B-\sqrt{-1}.\text{sen}.B$, onde si deduce

$$\cos.B=\frac{e^{B\sqrt{-1}}+e^{-B\sqrt{-1}}}{2}, \quad \text{sen}.B=\frac{e^{B\sqrt{-1}}-e^{-B\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Se nella formula $B\sqrt{-1}=\log.(\cos.B+\sqrt{-1}\,\text{sen}.B)$ facciamo $\cos.B=1$, $\text{sen}.B=0$, sarà primieramente $B=0$, ed infiniti altri valori di B, che soddisfanno a queste condizioni, saranno espressi dalla formula $\pm 2mp$, essendo $2p$ la periferia del circolo, ed m qualunque numero intero. Sarà dunque $\log.1=\pm 2mp\sqrt{-1}$, cioè il logaritmo dell'unità ha infiniti valori, uno de' quali è $=0$, e gli altri imaginarj. In egual modo se facciamo $\text{sen}.B=0$, $\cos.B=-1$, troveremo $\log.-1=\pm(2m-1)p\sqrt{-1}$, cioè il logaritmo dell'unità negativa ha infiniti valori, e tutti immaginarj. E siccome $a=1\times a$, e $-a=-1\times a$, se chiamiamo A il logaritmo reale del numero a, sarà $\log.a=A+\log.1$, e $\log.-a=A+\log.-1$, cioè il logaritmo di una quantità positiva ha infiniti valori, uno de' quali è reale e gli altri immaginarj, ed il logaritmo di una quantità negativa ha anch'esso infiniti valori, ma tutti immaginari; che è il famoso teorema del Sig. *Euler*. Se nella equazione $\log.-1=(2m-1)p\sqrt{-1}$ ponghiamo $m=1$ avremo la celebre proporzione di *Giovanni Bernoulli* $1:p=\sqrt{-1}:\log.-1$, cioè il diametro del circolo sta alla circonferenza come $\sqrt{-1}$ a $\log.-1$.

Si debba adesso ridurre alla forma $A+B\sqrt{-1}$ la formula $(a+b\sqrt{-1})^m$. Prendendo i logaritmi avremo
$\log.(a+b\sqrt{-1})^m=m\log.\sqrt{(a^2+b^2)}+m\beta\sqrt{-1}$
$=\log.[e^{m\log.\sqrt{(a^2+b^2)}}(\cos.m\beta+\sqrt{-1}.\text{sen}.m\beta)]$
$=\log.[\sqrt{(a^2+b^2)}^m(\cos.m\beta+\sqrt{-1}.\text{sen}.m\beta)]$; e ritornando dai logaritmi ai numeri avremo $(a+b\sqrt{-1})^m=\sqrt{(a^2+b^2)}^m\times\cos.m\beta$ $+\sqrt{-1}.\sqrt{(a^2+b^2)}^m\times\text{sen}.m\beta$, ove β è un arco, che ha per tangente $\frac{b}{a}$, o sia per seno $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, e per coseno $\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$.

Dividendo per $\sqrt{(a^2+b^2)}^m$ avremo

$$\left(\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}+\frac{b\sqrt{-1}}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\right)^m=\cos.m\beta+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}.m\beta\,.$$

Ma $\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=\cos.\beta$, $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=\mathrm{sen}.\beta$; dunque

$$(\cos.\beta+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}.\beta)^m=\cos.m\beta+\sqrt{-1}.\mathrm{sen}.m\beta,$$

e presa β negativa

$$(\cos.\beta-\sqrt{-1}.\mathrm{sen}.\beta)^m=\cos.m\beta-\sqrt{-1}.\mathrm{sen}.m\beta;$$

onde si deduce

$$\cos.m\beta=\frac{(\cos.\beta+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\beta)^m+(\cos.\beta-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}.\beta)^m}{2}$$

$$\mathrm{sen}.m\beta=\frac{(\cos.\beta+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}.\beta)^m-(\cos.\beta-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}.\beta)^m}{2\sqrt{-1}}\,.$$

Si risolvano in serie quest'espressioni, e si otterrà

$$\cos.m\beta=\overline{\cos.\beta}^m-\frac{m(m-1)}{2}\overline{\cos.\beta}^{m-2}\times\overline{\mathrm{sen}.\beta}^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}\overline{\cos.\beta}^{m-4}\times\overline{\mathrm{sen}.\beta}^4-\text{ec.}$$

$$\mathrm{sen}.m\beta=m\overline{\cos.\beta}^{m-1}\times\mathrm{sen}.\beta-\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\overline{\cos.\beta}^{m-3}\times\overline{\mathrm{sen}.\beta}^3$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5}\overline{\cos.\beta}^{m-5}\times\overline{\mathrm{sen}.\beta}^5-\text{ec.}$$

come avevamo osservato di sopra (69).

Se m è un numero fratto $=\frac{1}{n}$, avremo

$$\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})}=\sqrt[2n]{(a^2+b^2)}\left(\cos.\frac{\beta}{n}+\sqrt{-1}.\mathrm{sen}.\frac{\beta}{n}\right),$$

ove β è un arco, che ha per seno $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, e per coseno $\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Oltre l'arco β, che si suppone minore dell'angolo retto, vi sono infiniti altri archi, i quali hanno il medesimo seno e coseno, rappresentati dalla serie $2p+\beta$, $4p+\beta$, $6p+\beta$, $8p+\beta$, $10p+\beta$, ec., onde in luogo di $\frac{\beta}{n}$ possiamo prendere qualunque degli archi seguenti; $\frac{\beta}{n}$, $\frac{2p+\beta}{n}$, $\frac{4p+\beta}{n}$, $\frac{6p+\beta}{n}$, ec. fino

a $\frac{2(n-1)p+\beta}{n}$. Perchè se continuassimo avanti questa serie, la formula nostra riprenderebbe i valori precedenti, giacchè $\cos.\frac{2np+\beta}{n}=\cos.\frac{\beta}{n}$, $\cos.\frac{2(n+1)p+\beta}{n}=\cos.\frac{2p+\beta}{n}$, ec., e similmente $\text{sen}.\frac{2np+\beta}{n}=\text{sen}.\frac{\beta}{n}$, $\text{sen}.\frac{2(n+1)p+\beta}{n}=\text{sen}.\frac{2p+\beta}{n}$, ec. Quindi la radice $n.^{\text{esima}}$ della quantità $a+b\sqrt{-1}$ ha n diversi valori espressi dalla formula $\sqrt[2n]{(a^2+b^2)}\left(\cos.\frac{\gamma}{n}+\sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{\gamma}{n}\right)$, ove per γ si possono prendere i seguenti n archi

$$\beta,\ 2p+\beta,\ 4p+\beta,\ 6p+\beta,\ \ldots\ 2(n-1)p+\beta,$$

essendo β il più piccolo arco che ha $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ per seno, ed $\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ per coseno.

Sia proposta per esempio la formula $\sqrt[3]{[q+\sqrt{(q^2-c^3)}]}$, ove sia $q^2<c^3$. Avremo $a=q$, $b=\sqrt{(c^3-q^2)}$, e quindi $\sqrt[3]{[q+\sqrt{(q^2-c^3)}]}=\sqrt{c}\left(\cos.\frac{\beta}{3}+\sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{\beta}{3}\right)$, essendo β un angolo, che abbia $\frac{\sqrt{(c^3-q^2)}}{\sqrt{c^3}}$ per seno, e $\frac{q}{\sqrt{c^3}}$ per coseno. Similmente $\sqrt[3]{[q-\sqrt{(q^2-c^3)}]}=\sqrt{c}\left(\cos.\frac{\beta}{3}-\sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{\beta}{3}\right)$: onde le tre radici dell'equazione $x^3-3cx-2q=0$ nel caso irreducibile (46) saranno $x=2\sqrt{c}\times\cos.\frac{\beta}{3}$, $x=2\sqrt{c}\times\cos.\frac{2p+\beta}{3}$, $x=2\sqrt{c}\times\cos.\frac{4p+\beta}{3}$, ove $2p$ rappresenta la circonferenza del circolo.

Rimane a ridurre alla forma $A+B\sqrt{-1}$ la quantità $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$. Prendendo i logaritmi avremo $\log.(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=C+D\sqrt{-1}$, ove $C=m\log.\sqrt{(a^2+b^2)}-n\beta$, $D=n\log.\sqrt{(a^2+b^2)}+m\beta$, e β l'arco che ha $\frac{b}{a}$ per tangente. Facciamo $C+D\sqrt{-1}=\log.(A+B\sqrt{-1})$, ed avremo

$A = e^C \times \cos.D$, $B = e^C \times \text{sen}.D$, cioè
$A = e^{m\log.\sqrt{(a^2+b^2)}-n\beta} \times \cos.(n\log.\sqrt{(a^2+b^2)}+m\beta)$, e
$B = e^{m\log.\sqrt{(a^2+b^2)}-n\beta} \times \text{sen}.(n\log.\sqrt{(a^2+b^2)}+m\beta)$. Ora essendo $\log.(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = C+D\sqrt{-1} = \log.(A+B\sqrt{-1})$, se passiamo dai logaritmi ai numeri avremo
$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = A+B\sqrt{-1}$.

Pertanto qualunque quantità immaginaria o algebraica, o logaritmica ed esponenziale si riduce alla forma $A+B\sqrt{-1}$: e siccome i seni ed i coseni e le altre funzioni del cerchio si possono esprimere per mezzo delle quantità esponenziali, è manifesta la via di ridurre alla medesima forma anche le funzioni circolari.

76.

Applichiamo la teoria esposta alla ricerca delle radici dell'equazione $x^n \pm c = 0$. Sia primieramente $x^n = c$, ed avremo $x = \sqrt[n]{c}$; e se nel valore di $\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})}$ faremo $a = c$, e $b = 0$, troveremo $x = \sqrt[n]{c}\left(\cos.\frac{\gamma}{n} + \sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{\gamma}{n}\right)$, ove in luogo di γ si possono prendere gli archi 0, $2p$, $4p$, $6p$, ... $2(n-1)p$. Le radici adunque dell'equazione $x^n - c = 0$ saranno $x = \sqrt[n]{c}$,
$x = \sqrt[n]{c}\left(\cos.\frac{2p}{n} + \sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{2p}{n}\right)$, $x = \sqrt[n]{c}\left(\cos.\frac{4p}{n} + \sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{4p}{n}\right)$
. . . .
$x = \sqrt[n]{c}\left(\cos.\frac{2(n-1)p}{n} + \sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{2(n-1)p}{n}\right)$. Se si osserva che $\cos.m\phi + \sqrt{-1}\,\text{sen}.m\phi = (\cos.\phi + \sqrt{-1}\,\text{sen}.\phi)^m$, si vedrà che posto $\cos.\frac{2p}{n} + \sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{2p}{n} = a$, queste radici saranno rappresentate dalle quantità $\sqrt[n]{c}$, $a\sqrt[n]{c}$, $a^2\sqrt[n]{c}$, $a^3\sqrt[n]{c}$, ... $a^{n-1}\sqrt[n]{c}$. Allorchè n è un numero pari, tra le radici sarà compresa la quantità

$\sqrt[n]{c}\left(\cos.\frac{np}{n}+\sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{np}{n}\right)=-\sqrt[n]{c}$, perchè $\cos.p=-1$, e $\text{sen}.p=0$, cioè l'equazione $x^n-c=0$ avrà le due radici reali $+\sqrt[n]{c}$, e $-\sqrt[n]{c}$, come altronde è noto; se n è dispari, una sola sarà la radice reale $=\sqrt[n]{c}$, e tutte le altre immaginarie. Si sa dalla teoria dell'equazioni, che una di queste radici immaginarie essendo della forma $A+B\sqrt{-1}$, ve ne sarà sempre un' altra della forma $A-B\sqrt{-1}$, come si può ancora verificare. Infatti $\cos.\frac{2(n-1)}{n}p=\cos.\frac{2p}{n}$, $\text{sen}.\frac{2(n-1)}{n}p=-\text{sen}.\frac{2p}{n}$, e perciò l'ultima radice equivale a $\sqrt[n]{c}\left(\cos.\frac{2p}{n}-\sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{2p}{n}\right)$: così pure $\cos.\frac{2(n-2)p}{n}=\cos.\frac{4p}{n}$, $\text{sen}.\frac{2(n-2)p}{n}=-\text{sen}.\frac{4p}{n}$, onde la penultima radice sarà $\sqrt[n]{c}\left(\cos.\frac{4p}{n}-\sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{4p}{n}\right)$; e l'istesso si dica delle altre. I fattori adunque della quantità x^n-c saranno

$$x-\sqrt[n]{c}$$
$$x-\sqrt[n]{c}\left(\cos.\frac{2p}{n}+\sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{2p}{n}\right)$$
$$x-\sqrt[n]{c}\left(\cos.\frac{2p}{n}-\sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{2p}{n}\right)$$
$$x-\sqrt[n]{c}\left(\cos.\frac{4p}{n}+\sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{4p}{n}\right)$$
$$x-\sqrt[n]{c}\left(\cos.\frac{4p}{n}-\sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{4p}{n}\right)$$
ec.

e se si moltiplicano insieme i due fattori immaginarj corrispondenti, ne nasceranno i fattori reali di secondo grado, la forma generale de' quali sarà $x^2-2x\sqrt[n]{c}.\cos.\frac{2mp}{n}+\sqrt[n]{c^2}$, ove per $2m$ si può prendere qualunque numero pari non maggiore di n.

Se l'equazione sarà $x^n+c=0$, che ci dà $x=\sqrt[n]{-c}$, po-

nendo nella formula $\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})}$, $b=0$, ed $a=-c$ troveremo $x=\sqrt[n]{c}\left(\cos.\frac{\gamma}{n}+\sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{\gamma}{n}\right)$, ove per γ si prenderanno gli archi p, $3p$, $5p$, ... $(2n-1)p$. Allorchè x è dispari tra queste radici vi sarà compresa $\sqrt[n]{c(\cos.p+\sqrt{-1}\,\text{sen}.p)}$, cioè $-\sqrt[n]{c}$, che sarà la sola radice reale della equazione $x^n+c=0$; ma quando n è pari, tutte le radici saranno immaginarie. Qui pure, se due fattori immaginarj si moltiplicheranno insieme, ne verranno i fattori di secondo grado della quantità x^n+c, e la loro forma generale sarà $x^2-2x\sqrt[n]{c}.\cos.\frac{2m+1}{2}p+\sqrt[n]{c^2}$, ove per $2m+1$ si dovranno prendere tutti i numeri dispari non maggiori di n. Si osservi però che nel caso di n dispari, in luogo del fattore $x^2-2x\sqrt[n]{c}.\cos.p+\sqrt[n]{c^2}$, cioè del fattore $(x+\sqrt[n]{c})^2$ si dovrà prendere il fattor semplice $x+\sqrt[n]{c}$.

Da questi principj si può dedurre la dimostrazione del celebre teorema di *Cotes*, il quale si enuncia così. Se si divide (Fig. 5.) la circonferenza del cerchio $AaBPP'B'a'$ nelle parti eguali Aa, Aa', aB, $a'B'$, Bb, $B'b'$, ec., il numero delle quali sia $2n$, e da un punto qualunque M preso nel diametro AL si tirano a tutti i punti di divisione le rette Ma, Ma', MB, MB', Mb, Mb', ec., sarà sempre la somma delle potenze
$\overline{IA}^n+\overline{IM}^n=Ma.Ma'.Mb.Mb'$.ec., ed $\overline{IA}^n-\overline{IM}^n$
$=MA.MB.MB'.MC.MC'$.ec. Sia il raggio $IA=k$, $IM=x$, e preso un punto qualunque P nella circonferenza, e tirata la perpendicolare PQ al diametro AL, che prolungata incontri di nuovo la circonferenza in P', e condotte inoltre le rette MP, MP', se si chiama ϕ l'arco AP, sarà $PQ=k\,\text{sen}.\phi$, $MQ=x-k\cos.\phi$; onde $MP\times MP'=\overline{MP}^2=x^2-2kx\cos.\phi+k^2$. Se adesso facciamo ϕ successivamente $=0$, $\frac{2p}{n}$, $\frac{4p}{n}$, ec., avremo

$-MA=x-k$, $MB\times MB'=x^2-2kx\cos.\frac{2p}{n}+k^2$,

$MC \times MC' = x^2 - 2kx\cos.\frac{4p}{n} + k^2$, ec., i quali valori sono i fattori di $x^n - k^n = \overline{IM}^n - \overline{IA}^n$. Similmente ponendo $\phi = \frac{p}{n}, \frac{3p}{n}$, ec., avremo $Ma \times Ma' = x^2 - 2kx\cos.\frac{p}{n} + k^2$, $Mb \times Mb' = x^2 - 2kx\cos.\frac{3p}{n} + k^2$, ec., i quali sono i fattori di $x^n + k^n = \overline{IM}^n + \overline{IA}^n$. Dunque ec.

77.

Si debbano adesso trovar tutte le radici dell'equazioni derivative del secondo grado $x^{2n} - 2Ax^n + B^2 = 0$. Avremo $x = \sqrt[n]{[A \pm \sqrt{(A^2 - B^2)}]}$, e se A è $> B$, posto $A \pm \sqrt{(A^2 - B^2)} = c$, ed $a = \cos.\frac{2p}{n} + \sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{2p}{n}$, le radici della proposta saranno rappresentate dalle quantità $\sqrt[n]{c}$, $a\sqrt[n]{c}$, $a^2\sqrt[n]{c}$, ... $a^{n-1}\sqrt[n]{c}$, il numero delle quali è $2n$ a motivo del doppio segno contenuto nel valore di c. Se A è $< B$, ponghiamo nel valore di $\sqrt[n]{(a + b\sqrt{-1})}$, $a = A$, $b = \sqrt{(B^2 - A^2)}$, ed avremo $x = \sqrt[n]{B}\left(\cos.\frac{\gamma}{n} + \sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{\gamma}{n}\right)$, ove γ rappresenterà tutti i seguenti archi $\pm\delta$, $2p \pm \delta$, $4p \pm \delta$, $6p \pm \delta$ . . . . $2(n-1)p \pm \delta$, essendo δ il più piccolo arco, che ha $\frac{\sqrt{(B^2 - A^2)}}{B}$ per seno, ed $\frac{A}{B}$ per coseno, cioè sarà γ della forma $2mp \pm \delta$, purchè per m si prendano tutti i numeri interi minori di n. E qui pure si dimostrerà come sopra, che i fattori reali di secondo grado della quantità $x^{2n} - 2Ax^n + B^2$ nel caso di $A < B$ sono espressi dalla formula $x^2 - 2x\sqrt[n]{B}\cos.\frac{2mp \pm \delta}{n} + \sqrt[n]{B^2}$, ove $2m$ rappresenta tutti i numeri pari non maggiori di n. Se per evitare le quantità irrazionali facciamo $B = k^n$, sarà $A = k^n\cos.\delta$, e la formula

$x^2-2kx\cos.\frac{2mp\pm\delta}{n}+k^2$ rappresenterà i fattori trinomiali della funzione $x^{2n}-2k^nx^n\cos.\delta+k^{2n}$.

Quindi si deduce la dimostrazione del seguente teorema di *Moivre*: se nella circonferenza di un circolo ABL (Fig. 6) si prende un arco qualunque $AL=\delta$, e l'arco $AB=\frac{\delta}{n}$, poi cominciando dal punto B si divide la circonferenza in un numero n di parti eguali BC, Bc, CD, cd, ec., condotte da un punto M preso nel diametro che passa per A a tutti i punti di divisione le rette MB, MC, Mc, MD, Md, ec., sarà

$\overline{MB}^2.\overline{MC}^2.\overline{Mc}^2.\overline{MD}^2.\overline{Md}^2$. ec.$=\overline{AI}^{2n}-2\overline{AI}^n.\overline{MI}^n.\cos.\delta+\overline{MI}^{2n}$.

Poichè chiamando k il raggio AI, ed x la di lui porzione MI, e ϕ l'arco qualunque AP troveremo come sopra $\overline{MP}^2$ $=x^2-2kx\cos.\phi+k^2$; e ponendo in luogo di ϕ gli archi $\frac{\delta}{n}$, $\frac{2p-\delta}{n}$, $\frac{2p+\delta}{n}$, $\frac{4p-\delta}{n}$, $\frac{4p+\delta}{n}$, ec., otterremo per $\overline{MB}^2$, $\overline{Mc}^2$, $\overline{MC}^2$, $\overline{Md}^2$, $\overline{MD}^2$, ec. le medesime quantità, che abbiamo veduto essere i fattori di $x^{2n}-2k^nx^n\cos.\delta+k^{2n}$.

CAPITOLO VI.

Delle frazioni continue.

78.

Le *frazioni continue* formano un genere particolare di espressioni, che per la sua utilità merita di esser trattato con qualch'estensione. Frazione continua si chiama una frazione, il di cui denominatore è composto di un numero intero e di una frazione, ed il denominatore di questa è di nuovo composto di un numero intero e di una frazione, e così in seguito. Tali sono l'espressioni

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{ec.}}}}\qquad\qquad a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\text{ec.}}}}$$

Noi considereremo specialmente la prima forma, sì perchè è la più utile, sì perchè dal conoscere la natura di questa si rende nota anche l'indole dell'altra.

Per vedere come il valore della frazione continua esprimer si possa nella solita maniera, terminiamola gradatamente nella prima, nella seconda, nella terza frazione, ec., ed avremo

$$a=a$$

$$a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{abc+c+a}{bc+1}=\frac{(ab+1)c+a}{bc+1}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}=\frac{(abc+c+a)d+ab+1}{(bc+1)d+b}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}=\frac{abcde+cde+ade+abe+e+abc+c+a}{bcde+de+be+bc+1}$$

$$=\frac{(abcd+cd+ad+ab+1)e+abc+c+a}{(bcd+d+b)e+bc+1}$$

ec.

La legge di queste frazioni è la seguente: qualunque numeratore è eguale all'ultimo de' numeratori precedenti moltiplicato per la corrispondente delle lettere a, b, c; d, ec., ed al numeratore penultimo; e la medesima è la legge dei denominatori. Se dunque facciamo

$A=a$	$A'=1$
$B=bA+1$	$B'=b$
$C=cB+A$	$C'=cB'+A'$
$D=dC+B$	$D'=dC'+B'$
$E=eD+C$	$E'=eD'+C'$
ec.	ec.

quelle frazioni saranno $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{E}{E'}$, ec. Per dimostrar questa legge suppongo, che essa si verifichi per esempio fino al-

la frazione $\frac{D}{D'}$, e dico che avrà luogo anche per la frazione seguente $\frac{E}{E'}$. Infatti la frazione $\frac{D}{D'}$ si cangia in $\frac{E}{E'}$, se in quella si pone $d+\frac{1}{e}$ in luogo di d. Essendo adunque $\frac{D}{D'}=\frac{dC+B}{dC'+B'}$, sarà $\frac{E}{E'}=\frac{\left(d+\frac{1}{e}\right)C+B}{\left(d+\frac{1}{e}\right)C'+B'}=\frac{e(dC+B)+C}{e(dC'+B')+C'}=\frac{eD+C}{eD'+C'}$. Se la frazione continua è terminata, l'ultima di queste frazioni ci darà il di lei esatto valore, ma se la frazione continua va all'infinito, queste frazioni anderanno sempre più accostandosi al di lei vero valore.

Se prendiamo le differenze di queste frazioni, avremo

$\frac{B}{B'}-\frac{A}{A'}=\frac{1}{b}$, $\frac{C}{C'}-\frac{B}{B'}=-\frac{1}{b(bc+1)}$,

$\frac{D}{D'}-\frac{C}{C'}=\frac{1}{(bc+1)(bcd+d+b)}$, ec. Quindi la frazione continua

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{ec.}}}}$$

si potrà esprimere per la seguente serie

$$a+\frac{1}{b}-\frac{1}{b(bc+1)}+\frac{1}{(bc+1)(bcd+d+b)}-\text{ ec.}$$

onde viceversa le serie potranno convertirsi in frazioni continue.

Ma lasciando da parte queste cose, perchè poco utili, vediamo con qual mezzo le frazioni e le altre quantità ridur si possano in frazioni continue. Sia pertanto X una quantità, che non possa esprimersi in numeri interi: per conoscere il valore di questa quantità cerchiamo primieramente un numero intero così prossimo al valore di X, che la differenza da esso sia minore dell'unità. Sia a questo numero, e sarà $X-a$ minore dell'unità, e quindi $\frac{1}{X-a}$ maggiore dell'unità. Facciamo $\frac{1}{X-a}=X'$, e in simil guisa cerchiamo il numero intero b il più prossimo al valore di X'; sarà di nuovo $X'-b$ minore dell'unità, ed

$\frac{1}{X'-b}$ maggiore dell'unità. Se ponghiamo $\frac{1}{X'-b}=X''$, e cerchiamo il numero c prossimo al valore di X'', avremo anche adesso $X''-c<1$, ed $\frac{1}{X''-c}>1$; e così in seguito. Ora essendo $\frac{1}{X-a}=X'$, sarà $X-a=\frac{1}{X'}$, ed $X=a+\frac{1}{X'}$, similmente poichè $\frac{1}{X'-b}=X''$, sarà $X'=b+\frac{1}{X''}$, e così pure $X''=c+\frac{1}{X'''}$, ec. Se ponghiamo per ordine questi valori avremo

$$X=a+\frac{1}{X'}$$

$$X=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{X''}}$$

$$X=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{X'''}}}$$

e finalmente

$$X=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{ec.}}}}}$$

la quale sarà la frazione continua, che esprime il valore di X. I numeri a, b, c, ec. si possono prendere in due maniere, cioè o maggiori o minori delle corrispondenti quantità X, X', X'', ec., delle quali sono limiti. Ma se saranno tutti minori delle quantità X, X', ec., i denominatori b, c, ec. della frazione continua saranno tutti positivi; se saranno tutti maggiori, i denominatori saranno tutti negativi; e se saranno in parte minori e in parte maggiori, i denominatori saranno e positivi e negativi. Poichè se a è $<X$, sarà $X-a$ una quantità positiva, e tale sarà anche b; ma se $a>X$, sarà $X-a$ e perciò anche b una quantità negativa. Per evitare i termini negativi nella frazione continua noi prenderemo sempre i limiti minori. Si osservi intanto, che se alcuna delle quantità X', X'', ec. si trova eguale ad

un numero intero, allora sarà o $b=X'$, o $c=X''$, o $d=X'''$, ec., e la frazione continua sarà terminata. Così, se X'' è un numero intero, la frazione continua che esprime X sarà $X=a+\frac{1}{b+\frac{1}{X''}}$.

Supponghiamo che la quantità X sia una frazione razionale $\frac{M}{N}$, ove le lettere M ed N rappresentino numeri interi. È chiaro che a sarà il quoziente della divisione di M per N; onde se farassi questa divisione, ed il residuo si chiamerà M', sarà $\frac{M}{N}-a=\frac{M'}{N}$, ed $X'=\frac{N}{M'}$. Similmente per avere il valor prossimo di X' si divida N per M', ed il quoziente sarà b, il residuo sia M''. Quindi $X'-b=\frac{M''}{M'}$, ed $X''=\frac{M'}{M''}$: di nuovo adunque si dividerà M' per M'', ed il quoziente sarà $=c$, e così in seguito. È evidente pertanto, che per ridurre le frazioni ordinarie in frazioni continue convien fare quella medesima operazione, con la quale si cerca il massimo comun divisore delle quantità M ed N. I quozienti nati dalle divisioni saranno i denominatori della frazione continua, la quale si terminerà, allorchè la divisione si farà senza residuo.

Sia proposta per esempio la frazione $\frac{123}{87}$, e si faccia l'operazione seguente per trovare il massimo comun divisore de' numeri 123 ed 87.

```
87)123 (1
   87
   --
   36) 87 (2
       72
       --
       15) 36 (2
           30
           --
            6) 15 (2
               12
               --
                3) 6 (2
                   6
                   -
                   0
```

Poichè siamo giunti ad un residuo $=0$, l'operazione è terminata, ed abbiamo $a=1$, $b=2$, $c=2$, $d=2$, $e=2$; onde

$$\frac{123}{87}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}.$$

Anche le quantità irrazionali, e trascendenti si possono con questo mezzo svolgere in frazione continua, se prima si riducono in frazione decimale. Così essendo $\sqrt{2}=1,41421356$ $=\frac{141421356}{100000000}$, si faccia questa operazione,

100000000	141421356	1
82842712	100000000	2
17157288	41421356	2
14213560	34314576	2
2943728	7106780	2
2438648	5887456	2
ec.	1219324	

e sarà $\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{ec.}}}}}}$

Ma siccome il vero valore di una quantità espressa in decimali ha per limiti la frazione decimale data, e la medesima accresciuta dell'unità nell'ultima cifra, bisognerà far l'operazione su queste due frazioni, e non ammettere che quei quozienti, i quali son dati da ambedue le operazioni.

Trovati i valori di a, b, c, ec., se facciamo come sopra

$A=a$	$A'=1$
$B=ba+1$	$B'=b$
$C=cB+A$	$C'=cB'+A'$
$D=dC+B$	$D'=dC'+B'$
ec.	ec.

avremo le frazioni $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, $\frac{D}{D'}$, ec. convergenti verso il valore della quantità proposta X. Se osserviamo attentamente

queste frazioni vedremo in primo luogo, che i numeri A, B, C, ec., ed A', B', C', ec. crescono continuamente in modo, che B è $>A$, $C>B$, ec., $B'>A'$, $C'>B'$, ec. In secondo luogo, se moltiplichiamo in croce i termini di due frazioni contigue, avremo

$$BA'-AB'=1$$
$$CB'-BC'=AB'-BA'=-1$$
$$DC'-CD'=BC'-CB'=1$$
$$ED'-DE'=-1$$
ec.

Quindi apparisce, che tutte queste frazioni son ridotte ai minimi termini: perchè se nella frazione $\frac{C}{C'}$ per esempio i termini C e C' avessero un fattore comune, dovrebbe avere il medesimo fattore anche la quantità $CB'-BC'$, lo che non può essere a motivo di $CB'-BC'=-1$.

Se adesso pongliiamo l'equazioni precedenti sotto questa forma

$$\frac{B}{B'}-\frac{A}{A'}=\frac{1}{A'B'}$$
$$\frac{C}{C'}-\frac{B}{B'}=-\frac{1}{B'C'}$$
$$\frac{D}{D'}-\frac{C}{C'}=\frac{1}{C'D'}$$
ec.

vedremo che le differenze tra le frazioni $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, ec. vanno sempre diminuendo, e quindi esse formano una serie convergente. Di più la differenza tra due frazioni consecutive è così piccola, che non può tra due di esse cadere un'altra frazione, la quale abbia il denominatore più piccolo di quello delle due frazioni. Ponghiamo infatti che tra le due frazioni $\frac{C}{C'}$ e $\frac{D}{D'}$ sia compresa la frazione $\frac{m}{n}$, e sia se è possibile n minore di C' o di D'. La differenza adunque tra $\frac{m}{n}$ e $\frac{C}{C'}$, cioè $\frac{mC'-nC}{nC'}$ dovrà esser minore della differenza tra $\frac{C}{C'}$ e $\frac{D}{D'}$, cioè $<\frac{1}{C'D'}$; ma quella differen-

za non può mai essere $<\frac{1}{nC'}$, dunque se $n<D'$, quella differenza sarà sempre maggiore di $\frac{1}{C'D'}$. Similmente la differenza tra $\frac{m}{n}$ e $\frac{D}{D'}$ non potendo essere $<\frac{1}{nD'}$, sarà $>\frac{1}{C'D'}$ se $n<C'$. È adunque impossibile che tra le frazioni $\frac{C}{C'}$ e $\frac{D}{D'}$ cada un' altra frazione $\frac{m}{n}$, in cui sia n minore di C' o di D'.

Vediamo adesso quanto queste frazioni si accostano al vero valore della quantità X che rappresentano. Se dunque a è il valor prossimo di X, $\frac{1}{X-a}=X'$, e b il valor prossimo di X', $\frac{1}{X'-b}=X''$, e c il valor prossimo di X'', ec. avremo

$$X=a+\frac{1}{X'}$$

$$X=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{X''}}$$

$$X=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{X'''}}}$$

ec.

o pure riducendo le frazioni continue a frazioni comuni

$$X=\frac{aX'+1}{X'}$$

$$X=\frac{(ab+1)X''+a}{bX''+1}$$

$$X=\frac{[(ab+1)c+a]X'''+ab+1}{(bc+1)X'''+b}$$

ec.

e ponendo A, A', B, B', ec. invece de' loro valori

$$X=\frac{AX'+1}{A'X'}$$

$$X=\frac{BX''+A}{B'X''+A'}$$

$$X=\frac{CX'''+B}{C'X'''+B'}$$

ec.

Quindi otterremo

$$X=\frac{A}{A'}+\frac{1}{A'X'}$$
$$X=\frac{B}{B'}-\frac{1}{B'(B'X''+A')}$$
$$X=\frac{C}{C'}+\frac{1}{C'(C'X'''+B')}$$
ec.

Ora essendo $X'>b$, $X''>c$, $X'''>d$, ec., sarà $X'>B'$, $B'X''+A'>B'c+A'>C'$, $C'X'''+B'>C'd+B'>D'$, ec.; e siccome $X'<b+1$, $X''<c+1$, $X'''<d+1$, ec., sarà $X'<B'+1<B'+A'$, $B'X''+A'<B'(c+1)+A'<C'+B'$, $C'X'''+B'<C'(d+1)+B'<D'+C'$, ec. Le differenze adunque delle frazioni $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, ec. dal vero valore sono respettivamente minori delle quantità $\frac{1}{A'B'}$, $\frac{1}{B'C'}$, $\frac{1}{C'D'}$, ec., e maggiori delle quantità $\frac{1}{A'(B'+A')}$, $\frac{1}{B'(C'+B')}$, $\frac{1}{C'(D'+C')}$, ec. Dal che apparisce, quanto gli errori siano piccoli, e quanto vadano sempre divenendo minori. Inoltre essendo le frazioni $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, ec. alternativamente minori e maggiori della quantità X, il valore di questa quantità sarà compreso tra due frazioni consecutive. E siccome abbiamo dimostrato che tra due frazioni consecutive non può esser contenuta alcuna frazione che abbia il denominatore minore di uno di quelli delle due frazioni, ne segue che ciascuna delle frazioni $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, ec. esprimerà il valore di X più accuratamente di qualunque frazione che abbia un denominatore minore. Se delle frazioni $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, ec. formiamo le due serie $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$, $\frac{E}{E'}$, ec.; $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$, ec.; la prima conterrà frazioni tutte minori di X, le quali anderanno sempre più accostandosi a questa quantità, e la seconda sarà composta di frazioni tutte maggiori di X, ma che andranno diminuendo verso la medesima quantità. Se prendiamo le differenze delle frazioni della prima o della seconda serie, troveremo

$$\frac{C}{C'}-\frac{A}{A'}=\frac{c}{A'C'}$$
$$\frac{E}{E'}-\frac{C}{C'}=\frac{e}{C'E'}$$
ec.
$$\frac{B}{B'}-\frac{D}{D'}=\frac{d}{B'D'}$$
$$\frac{D}{D'}-\frac{F}{F'}=\frac{f}{D'F'}$$
ec.

Ora se i numeri c, d, e, f, ec. fossero tutti eguali all'unità, si potrebbe provar come sopra, che tra due frazioni consecutive di ambedue le serie non si può inserire alcuna frazione, il denominatore della quale sia minore del denominatore di queste due frazioni. Ma se i numeri c, d, ec. sono maggiori dell'unità, si potranno inserire tante frazioni intermedie, quante unità son contenute ne' numeri $c-1$, $d-1$, ec., e queste frazioni saranno quelle che nascono dal porre successivamente i numeri 1, 2, 3, ... $c-1$ in luogo di c nei valori di C e C', i numeri 1, 2 ... $d-1$ in luogo di d nei valori di D e D', ec. Così se $c=4$, avremo $C=4B+A$, $C'=4B'+A'$, e tra le frazioni $\frac{A}{A'}$ e $\frac{C}{C'}$ si potranno inserire le tre frazioni intermedie $\frac{B+A}{B'+A'}$, $\frac{2B+A}{2B'+A'}$, $\frac{3B+A}{3B'+A'}$.

Se prendiamo le differenze tra le frazioni $\frac{A}{A'}$, $\frac{B+A}{B'+A'}$ ec. troveremo

$$\frac{B+A}{B'+A'}-\frac{A}{A'}=\frac{1}{A'(B'+A')}$$
$$\frac{2B+A}{2B'+A'}-\frac{B+A}{B'+A'}=\frac{1}{(B'+A')(2B'+A')}$$
$$\frac{3B+A}{3B'+A'}-\frac{2B+A}{2B'+A'}=\frac{1}{(2B'+A')(3B'+A')}$$
ec.

onde con un discorso simile al precedente si potrà provare che tra due di queste frazioni non può cadere una qualunque frazione $\frac{m}{n}$, il di cui denominatore n sia contenuto tra i denomi-

natori di queste frazioni. E se le frazioni $\frac{A}{A'}$, $\frac{B+A}{B'+A'}$, ec. si sottraggono dalla frazione $\frac{B}{B'}$, si otterrà

$$\frac{B}{B'}-\frac{A}{A'}=\frac{1}{A'B'}$$
$$\frac{B}{B'}-\frac{B+A}{B'+A'}=\frac{1}{(B'+A')B'}$$
$$\frac{B}{B'}-\frac{2B+A}{2B'+A'}=\frac{1}{(2B'+A')B'}$$
ec.

e quindi in simil guisa si dimostrerà, che tra la frazione $\frac{B}{B'}$ e ciascuna delle frazioni $\frac{A}{A'}$, $\frac{B+A}{B'+A'}$, ec. non potrà cadere alcuna frazione $\frac{m}{n}$, in cui il denominatore n sia minore del denominatore di quella frazione. Onde ciascuna di queste frazioni si accosterà al vero valore di X più di qualunque altra frazione, che fosse espressa in termini più semplici. Facilmente si vede, che quelle proprietà, che abbiamo dimostrato convenire alle frazioni intermedie tra $\frac{A}{A'}$ e $\frac{C}{C'}$, appartengono egualmente a quelle che si possono inserire tra $\frac{B}{B'}$ e $\frac{D}{D'}$, tra $\frac{C}{C'}$ ed $\frac{E}{E'}$, ec.

Quindi può risolversi il problema seguente: data una frazione di termini molto grandi, trovare tutte le frazioni espresse in numeri minori, le quali si avvicinino tanto al valore della frazione data, che non sia possibile l'accostarvisi di più, senza adoprare numeri maggiori. Si riduca la frazione proposta in frazione continua, e da essa si formino le frazioni $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, ec. l'ultima delle quali sarà la frazione proposta, e sarà sciolto il problema, perchè ciascuna di queste frazioni esprimerà più accuratamente il valore della proposta, che qualunque altra frazione composta di termini più semplici. Che se vorremo considerare separatamente le frazioni maggiori e le minori della proposta, inseriremo tra le frazioni precedenti tante frazioni intermedie, quante potremo, ed avremo così due serie di frazioni

convergenti verso la proposta, le une tutte minori, e le altre tutte maggiori della data, e le frazioni contenute in ciascuna di queste serie risolveranno egualmente il problema.

Sia data per esempio la frazione decimale 3, 141592, la quale esprime il rapporto della circonferenza del cerchio al di lui diametro, e sia proposto di trovare in numeri minori i rapporti i più prossimi a questo. Si riduca la frazione decimale data in frazione continua, e si troveranno i denominatori, 3, 7, 15, 1, ec. dai quali si formeranno le frazioni convergenti $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, ec.; che saranno alternativamente minori e maggiori del vero rapporto della circonferenza al diametro, e ciascuna delle quali si accosterà più a questo rapporto di qualunque altra frazione che sia concepita in termini più semplici. E se vogliamo separare le frazioni minori del vero rapporto dalle maggiori, potremo inserirvi le convenienti frazioni intermedie, ed otterremo le due serie.

$$\frac{3}{1}, \frac{25}{8}, \frac{47}{15}, \frac{69}{22}, \frac{91}{29}, \frac{113}{36}, \frac{135}{43}, \frac{157}{50}, \frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92}, \frac{311}{99}, \frac{333}{106}, \text{ec.}$$

$$\frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \frac{355}{113}, \text{ec.}$$

Le frazioni contenute nella prima serie si accostano al vero più di qualunque frazione minore del rapporto della periferia al diametro, e concepita in termini più semplici, e quelle della seconda Serie son più prossime al vero rapporto di qualunque frazione maggiore di esso, ed espressa in termini più semplici.

La prima idea delle frazioni continue si deve a *Mylord Brouncker*, il quale espresse con una di esse il rapporto del quadrato circoscritto al cerchio all'area del medesimo. Alcune ricerche su questa specie di espressioni si trovano nelle opere di *Wallis*, ma *Huyghens* è il primo che abbia conosciute le principali proprietà delle frazioni continue, le quali abbiamo fin qui esposte. Passiamo adesso a vedere alcuni de'vantaggi, che l'Algebra ha riportati dalla dottrina delle frazioni continue per opera del Sig. *de la Grange*.

79

Nella prima Parte, allorchè parlavamo dell'approssimazione delle radici dell'equazioni, ponevamo $x=p+\frac{1}{y}$, $y=q+\frac{1}{z}$, $z=r+\frac{1}{u}$, $u=s+\frac{1}{t}$, ec., ove p, q, r, s, ec. esprimevano i limiti interi delle incognite x, y, z, ec. Sarà dunque

$$x=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\text{ ec.}}}}$$

cioè le radici dell'equazioni saranno in tal modo espresse per mezzo di una frazione continua. Quindi le frazioni $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, ec. (siccome equivalgono alle frazioni $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, ec.) avranno la proprietà di esprimere le radici dell'equazioni tanto accuratamente, quanto si può non adoprando numeri maggiori; lo che ognun vede quanto accresca il pregio di quel metodo.

Per ridurre in frazione continua le radici dell' equazione del secondo grado $Ax^2+Bx+C=0$, si deve fare il seguente calcolo,

B	A	$\lambda < \frac{-B+\sqrt{D}}{2A}$
$B'=2A\lambda+B$	$A'=\frac{B'^2-D}{4A}$	$\lambda' < \frac{-B'-\sqrt{D}}{2A'}$
$B''=2A'\lambda'+B'$	$A''=\frac{B''^2-D}{4A'}$	$\lambda'' < \frac{-B''+\sqrt{D}}{2A''}$
$B'''=2A''\lambda''+B''$	$A'''=\frac{B'''^2-D}{4A''}$	$\lambda''' < \frac{-B'''-\sqrt{D}}{2A'''}$
ec.	ec.	ec.

ove $D=B^2-4AC$, ed il segno $<$ denota il numero intero prossimamente minore della quantità che succede a questo segno; e si avrà

$$x=\lambda+\cfrac{1}{\lambda'+\cfrac{1}{\lambda''+\cfrac{1}{\lambda'''+\text{ec.}}}}$$

nella qual frazione continua abbiamo dimostrato, che ritornano i medesimi numeri con un certo periodo, ed essa si chiama perciò *periodica*.

Siccome una equazione qualunque del secondo grado conduce ad una frazione continua periodica, viceversa se avremo una frazione continua periodica, la quale vada all'infinito, potremo giungere all'equazione, dalla quale essa dipende, e quindi al valore della frazione. Sia data per esempio la frazione continua periodica $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\text{ec.}}}$, la quale scorre all'infinito; è chiaro che ponendola $=x$ avremo $x-a=\frac{1}{b+x-a}$ e quindi $x^2-(2a-b)x+a^2-ab-1=0$, ed $x=\frac{2a-b+\sqrt{(b^2+4)}}{2}$.

Così pure se avremo la frazione continua $x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{ec.}}}}}$

sarà $x-a=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+x-a}}=\frac{c+x-a}{bc+bx-ab+1}$, e quindi

$bx^2-(2ab-bc)x+a^2b-abc-c=0$, ed $x=\frac{2a-c}{2}+\frac{\sqrt{(b^2c^2+4bc)}}{2b}$.

80.

Se ripigliamo l'equazioni trovate di sopra per esprimere le differenze tra la quantità X, e le frazioni $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, ec., avremo

$$A-A'X=-\frac{1}{X'}$$

$$B-B'X=\frac{1}{B'X''+A'}$$

$$C-C'X=-\frac{1}{C'X'''+B'}$$

$$D-D'X=\frac{1}{D'X^{IV}+C'}$$

ec.

ove apparisce che queste quantità sono alternativamente negative e positive. E siccome $1+bX''=X'X''$, $1+cX'''=X''X'''$, $1+dX^{IV}=X'''X^{IV}$, ec.; sarà

$$B'X''+A'=X'X''$$
$$C'X'''+B'=(cB'+A')X'''+B'=(B'X''+A')X'''$$
$$D'X^{IV}+C'=(dC'+B')X^{IV}+C'=(C'X'''+B')X^{IV}$$

ec.

e poichè X', X'', X''', ec. son maggiori dell' unità, le quantità X', $B'X''+A'$, $C'X'''+B'$, ec. anderanno sempre crescendo. Quindi le quantità $A-A'X$, $B-B'X$, $C-C'X$, ec., se si fa astrazione dal loro segno, cioè se si prendono tutte positivamente, anderanno continuamente diminuendo.

Se il denominatore n della frazione $\frac{m}{n}$ è contenuto tra due denominatori consecutivi delle frazioni $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, ec., cioè se è per esempio $n>B'$ e $<C'$, sarà prescindendo dal segno $m-nX>B-B'X$, ed in conseguenza $>C-C'X$. Si ponga $Cn-C'm=M$, $Bn-B'm=N$, sarà $m=\frac{BM-CN}{B'C-BC'}$, $n=\frac{B'M-C'N}{B'C-BC'}$, cioè, a motivo di $B'C-BC'=-1$, $m=CN-BM$, $n=C'N-B'M$. Ora, poichè $n<C'$, le quantità M ed N dovranno avere il medesimo segno. Ciò posto, sarà $m-nX=N(C-C'X)-M(B-B'X)$: ma M ed N hanno il medesimo segno, e $B-B'X$, $C-C'X$ segno diverso; dunque le quantità $N(C-C'X)$ e $-M(B-B'X)$ avranno il medesimo segno, e quindi $m-nX$, che è eguale alla loro somma, sarà maggiore di ciascuna delle quantità $B-B'X$, e $C-C'X$. Pertanto se $\frac{p}{q}$ è una delle frazioni convergenti verso il valore di X, la quantità $p-Xq$, facendo astrazione dai

segni, avrà un valore più piccolo di quello che avrebbe, se invece di p e q vi si ponessero altri numeri minori.

Sia adesso proposta la quantità

$$Ax^n + Bx^{n-1}y + Cx^{n-2}y^2 \ldots + Ny^n,$$

ove A, B, C, ec. sono numeri interi, e si cerchi quali numeri interi si debbano prendere per x ed y, perchè questa quantità divenga la più piccola possibile. Se chiamiamo a, a', a'', ec. le radici reali, e $b \pm c\sqrt{-1}$, ec., le radici immaginarie della equazione

$$Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} \ldots + N = 0,$$

la formola proposta si potrà porre sotto la forma

$$A(x-ay)(x-a'y)(x-a''y) \ldots [(x-by)^2 + c^2y^2] \ldots$$

e la questione si ridurrà a fare in modo, che il prodotto di questi fattori sia il più piccolo possibile.

Se tutte le quantità a, a', a'', ec., b, ec. sono del medesimo segno, per esempio tutte positive, cerchiamo primieramente di trasformare la formola data in un'altra

$$A(x'-ey)(x'-e'y)(x'-e''y) \ldots [(x'-fy)^2 + c^2y^2] \ldots$$

ove le quantità e, e', ec. f, ec. non siano tutte positive. Sia k un numero intero positivo minore di alcune radici, per esempio di a e di a', e maggiore di tutte le altre, e si faccia $x = x' + ky$, la formola data diventerà

$$A(x' + \overline{k-a}.y)(x' + \overline{k-a'}.y)(x' + \overline{k-a''}.y) \ldots [(x' + \overline{k-b}.y)^2 + c^2y^2] \ldots$$

ove le quantità $a-k$, $a'-k$ sono positive, $a''-k$, ec., $b-k$, ec. sono negative, e quindi abbiamo ottenuto l'intento.

Questa soluzione riesce sempre, fuorchè nel solo caso, in cui tutte le quantità a, a', ec., b, ec. cadono tra due numeri interi consecutivi; ma allora potrà usarsi il metodo seguente. Siano le frazioni $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$ una maggiore, l'altra minore di una qualunque radice, per esempio di a, ma talmente prossime ad essa, che siano ambedue minori di tutte le radici più grandi di a, e maggiori di tutte le altre più piccole di a, lo che è sempre possibile, e si faccia $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \alpha' x' + \beta' y'$. Sarà $x' = \frac{\beta' x - \beta y}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$, $y' = \frac{\alpha y - \alpha' x}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$; ma acciò ai valori interi di x e di y corrispondano sempre numeri interi per x' ed y', converrà che sia $\alpha\beta' - \alpha'\beta = \pm 1$, alla qual condizione soddisfaremo pren-

dendo per $\frac{a}{a'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$ due frazioni consecutive convergenti verso a. Posto ciò, se facciamo

$$A'=A(a-a'a)(a-a'a')(a-a'a'')\ \ldots\ldots\ (a-a'b)^2\ \ldots\ldots$$

la nostra formola diventerà

$$A'\left(x'+\frac{\beta-\beta a}{a-a'a}y'\right)\left(x'+\frac{\beta-\beta'a'}{a-a'a'}y'\right)\ldots\left[\left(x'+\frac{\beta-\beta'b}{a-a'b}y'\right)^2+c^2\left(\frac{a'x'+\beta'y'}{a-a'b}\right)^2\right]\ldots$$

ove la sola quantità $\frac{\beta-\beta'a}{a-a'a}$ è negativa, e le altre tutte $\frac{\beta-\beta'a'}{a-a'a'}$, ec. $\frac{\beta-\beta'b}{a-a'b}$, ec. sono positive. Questo metodo è generale per tutti i casi, e per mezzo di esso la data formola potrà sempre trasformarsi nella seguente

$$A'(x'-ey')(x'+e'y')(x'+e''y')\ldots[(x'+fy')^2+g^2y^2]\ldots,$$

ove le quantità e, e', ec. f, ec. sono tutte positive, ed è $x'-ey'=\frac{x-ay}{a-a'a}$, $x'+e'y'=\frac{x-a'y}{a-a'a'}$, ec., $(x'+fy')^2+g^2y^2=\frac{(x-by)^2+c^2y^2}{(a-a'b)^2}$, ec.

Premessi questi principj cerchiamo adesso il più piccolo valore, che la nostra formola può ricevere in numeri interi. Sia essa in primo luogo del secondo grado, e risoluta ne' suoi fattori ci presenterà da considerare le tre forme seguenti

$$A[(x-by)^2+c^2y^2]$$
$$A(x-ay)(x+a'y)$$
$$A(x-ay)(x-a'y)$$

secondo che i di lei fattori sono immaginarj, o essendo reali hanno il medesimo segno o segni diversi.

Incominciando dalla prima siano p e q i valori di x e di y nel caso del minimo, la quantità $(p-bq)^2+c^2q^2$ sarà tale, che posti in luogo di p e q de' numeri differenti, almeno fino ad un certo segno, essa acquisterà un valore maggiore. Ma se in luogo di p e di q porremo numeri minori, il termine c^2q^2 riescirà minore; dunque converrà che divenga in tal caso maggiore la quantità $p-bq$. Ciò posto io dico, che $\frac{p}{q}$ sarà una frazione convergente verso b; poichè se non lo fosse, siano $\frac{m}{n}$, $\frac{r}{s}$ quelle tali frazioni convergenti consecutive, nelle quali s è $>q$, ed $n<q$, e facendo astrazione dai segni avremo $m-bn<p-bq$; dunque $(p-bq)^2+c^2q^2$ non sarebbe un minimo contro l'ipotesi.

Nel secondo caso, se x ed y hanno il medesimo segno, allorchè la formola è minima, il fattore $x+a'y$ sarà sempre minore, quando ad x ed y si danno valori più piccoli, e perciò dovrà essere in tal caso un minimo il fattore $x-ay$; e quindi col discorso usato nel primo caso si proverà, che $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso a. Si vede egualmente, che quando x ed y hanno segni diversi sarà nel caso del minimo $-\frac{x}{y}$ una frazione convergente verso a'.

Si trasformi la terza formola nella seguente

$$A'(x'-ey')(x'+e'y'),$$

ed apparirà che, se nel caso del minimo x' ed y' hanno il medesimo segno, sarà un minimo il fattore $x'-ey'=\frac{x-ay}{a-a'a}$, cioè a motivo di $a-a'a$ costante, sarà un minimo il fattore $x-ay$, e quindi $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso a. Se poi x' ed y' hanno segni diversi, sarà un minimo il fattore $x'+e'y'=\frac{x-a'y}{a-a'a}$, cioè il fattore $x-a'y$, e perciò $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso a'. Dunque nel caso del minimo $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso a o verso a'.

Passiamo alla formola del terzo grado

$$Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3,$$

e consideriamo le tre diverse forme, che risoluta ne' suoi fattori può prendere

$$A(x-ay)(x-a'y)(x+a''y)$$
$$A(x-ay)(x-a'y)(x-a''y)$$
$$A(x-ay)[(x-by)^2+c^2y^2]$$

ove si omettono le altre, perchè o si riducono a queste presa y negativa, o non presentano difficoltà.

Riguardo alla prima, se nel caso del minimo x ed y hanno il medesimo segno, sarà un minimo la quantità $(x-ay)(x-a'y)$, e quindi, per ciò che abbiamo dimostrato di sopra, $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso a o verso a'. Se x ed y hanno segni

diversi, sarà un minimo il fattore $x+a''y$, e quindi $-\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso a''.

La seconda formola si trasformi nella seguente

$$A'(x'-ey')(x'+e'y')(x'+e''y');$$

onde apparisce che, se x' ed y' hanno il medesimo segno, è un minimo il fattore $x'-ey'$, cioè $x-ay$, ed $\frac{x}{y}$ è una frazione convergente verso a. Se poi x' ed y' hanno segni diversi, sarà un minimo la quantità $(x'+e'y')(x'+e''y')$, cioè $(x-a'y)(x-a''y)$, e perciò $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso a' o verso a''.

Finalmente la terza formola diventa

$$A'(x'-ey')[(x'+fy')^2+g^2y^2],$$

e se nel caso del minimo x' ed y' hanno il medesimo segno, sí vede che dovrà esser minima la quantità $x'-ey'$, cioè $x-ay$; se poi x' ed y' hanno segni diversi, sarà un minimo la quantità $(x'+fy')^2+g^2y^2$, o sia la quantità $(x-by)^2+c^2y^2$. Onde $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso a o verso b.

Continuando il medesimo ragionamento vedremo in generale, che la funzione

$$Ax^n+Bx^{n-1}y+Cx^{n-2}y^2 \ldots +Ny^n$$

otterrà il più piccolo valore in numeri interi, quando $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso le radici reali, o verso le parti reali delle radici immaginarie della equazione

$$Az^n+Bz^{n-1}+Cz^{n-2} \ldots +N=0,$$

avvertendo che si dovrà prendere x ed y col medesimo segno, o con segni diversi, secondo che le corrispondenti radici reali, o le parti reali delle radici immaginarie saranno positive, o negative.

81.

Facciamo l'applicazione di questa teoria alle formole del secondo grado, e sia proposto di trovare il minimo valore della funzione

$$Ax^2+Bxy+Cy^2.$$

Le radici dell'equazione $Az^2+Bz+C=0$ sono espresse dalla formula $\frac{-B\pm\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}$, ove convien distinguere tre casi. Primieramente se B^2-4AC è un numero quadrato, le radici saranno razionali, e la formula $Ap^2+Bpq+Cq^2$ diventerà $=0$, se prenderemo $\frac{p}{q}$ eguale all'una o all'altra di queste radici, e quindi zero sarà il più piccolo valore di essa. In secondo luogo se B^2-4AC è una quantità negativa, le radici saranno immaginarie; e perciò convertiremo in frazion continua la quantità $-\frac{B}{2A}$ prendendola positivamente, e trovate le frazioni convergenti verso di essa prenderemo per p i numeratori e per q i denominatori di queste frazioni, avvertendo di dare a p e q i medesimi segni o segni diversi, secondo che sarà $-\frac{B}{2A}$ positiva o negativa. E quella supposizione, che ci darà il più piccolo valore della formula proposta, ci somministrerà il minimo cercato.

In terzo luogo se B^2-4AC è una quantità positiva non quadrata, bisognerà convertire in frazion continua la formula $\frac{\mp B\pm\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}$, ove il doppio segno $\pm$ si prenderà in modo che questa quantità riesca positiva. Ad ottener ciò bisognerà eseguire il seguente calcolo, ove $D=B^2-4AC$, (60)

$\mp B$	A	$\lambda < \frac{\mp B\pm\sqrt{D}}{2A}$
$B'=2A\lambda\mp B$	$A'=\frac{B'^2-D}{4A}$	$\lambda' < \frac{-B'\mp\sqrt{D}}{2A'}$
$B''=2A'\lambda'+B'$	$A''=\frac{B''^2-D}{4A'}$	$\lambda'' < \frac{-B''\pm\sqrt{D}}{2A''}$
ec.	ec.	ec.

finchè si giunga ad avere $A^{(n+\mu)}=A^{(n)}$, e $B^{(n+\mu)}=B^{(n)}$, essendo μ pari, perchè poi ritorneranno i medesimi numeri, e la frazione richiesta sarà $\lambda+\cfrac{1}{\lambda'+\cfrac{1}{\lambda''+\text{ec.}}}$. Si cerchino le frazioni

$\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, ec. convergenti verso questa frazione continua, ed i loro numeratori si prendano per x, i denominatori per y, e si dia a queste quantità il medesimo segno o segno diverso, secondo che la quantità $\mp B$ avrà il segno superiore o l'inferiore. Quei valori di x ed y, che daranno il più piccolo valore della formula proposta, risolveranno il problema. Ma per verificar ciò non occorre fare un nuovo calcolo; poichè le quantità A', A'', ec. esprimono il valore della funzione data, allorchè vi si pone α, β, ec. in luogo di x, ed α', β', ec. in luogo di y. Infatti abbiamo veduto di sopra (60), che le quantità A', A'', ec. si esprimono nel modo seguente.

$$A' = A\lambda^2 + B\lambda + C$$
$$A'' = A'\lambda'^2 + B'\lambda + A$$
$$A''' = A''\lambda''^2 + B''\lambda'' + A'$$
ec.

E se facciamo $z = \lambda + \frac{1}{z'}$, $z' = \lambda' + \frac{1}{z''}$, $z'' = \lambda'' + \frac{1}{z'''}$, ec., dalla equazione $Az^2 + Bz + C = 0$ ne nascono le trasformate

$$A'z'^2 + B'z' + A = 0$$
$$A''z''^2 + B''z'' + A' = 0$$
$$A'''z'''^2 + B'''z''' + A'' = 0$$
ec.

Dal che apparisce che A' è ciò che diventa la quantità $Az^2 + Bz + C$, se vi si pone $z = \lambda$; A'' ciò che diventa la quantità $A'z'^2 + B'z' + A$, se vi si pone $z' = \lambda'$, o sia ciò che diventa la quantità $Az^2 + Bz + C$, se vi si pone $z = \lambda + \frac{1}{\lambda'} = \frac{\beta}{\beta'}$, e si tolgono poi le frazioni; A''' è ciò che diventa la quantità $A''z''^2 + B''z'' + A'$ se vi si pone $z'' = \lambda''$, o sia ciò che diventa la quantità $Az^2 + Bz + C$ se vi si pone $z = \lambda + \cfrac{1}{\lambda' + \cfrac{1}{\lambda''}}$, e si tolgono poi le frazioni, e così in seguito. Sarà dunque

$$A' = A\alpha^2 + B\alpha\alpha' + C\alpha'^2$$
$$A'' = A\beta^2 + B\beta\beta' + C\beta'^2$$
$$A''' = A\gamma^2 + B\gamma\gamma' + C\gamma'^2$$
ec.

cioè le quantità A', A'', A''', ec. esprimono i valori della funzione $Ax^2+Bxy+Cy^2$, allorchè in luogo di x e di y vi si pongono i numeratori ed i denominatori delle frazioni $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, ec. Pertanto il più piccolo numero contenuto nella serie A, A', A'', ec. sarà il minimo cercato.

Esempio I.

Si debba cercare il più piccolo valore della quantità

$$7x^2+22xy+20y^2.$$

Avremo $A=7$, $B=22$, $C=20$, e $B^2-4AC=-76$ cioè negativa, quindi dovremo ridurre in frazion continua la quantità $\frac{-B}{2A}=-\frac{11}{7}$. Operando sulla frazione $\frac{11}{7}$ troveremo i denominatori 1, 1, 1, 3, e quindi dedurremo le frazioni convergenti $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{11}{7}$, e siccome $-\frac{B}{2A}$ è una quantità negativa, dovremo tentare per x i numeri 1, 2, 3, 11, e per y i numeri -1, -1, -2, e -7. Ciò posto se esprimiamo con la lettera X la funzione proposta troveremo

x	y	X
1	0	7
1	-1	5
2	-1	4
3	-2	11
11	-7	133.

Quindi il più piccolo valore di X è 4, e questo risulta dai valori $x=2$, $y=-1$.

Esempio II.

Sia proposto di trovare in numeri interi il più piccolo valore della quantità

$$8x^2-117xy+426y^2.$$

Avremo $A=8$, $B=-117$, $\sqrt{(B^2-4AC)}=\sqrt{D}=\sqrt{57}$, e siccome D è positiva dovremo convertire in frazion continua la quantità $\frac{\pm 117 \pm \sqrt{57}}{16}$, e acciò questa sia positiva, prenderemo 117 sempre col segno superiore, e $\sqrt{57}$ coll'uno o coll'altro segno.

pre più grandi. Infatti nell'una e nell' altra serie dei numeri A, A', A'', ec. il termine -1 ritorna sempre dopo sei termini. Onde spingendo più avanti le frazioni convergenti, potremo prendere per $\frac{x}{y}$ quelle che corrispondono nel primo caso ad A^{VII}, A^{XIII}, ec. e nel secondo ad A^{VIII}, A^{XIV}, ec. Si può ancora trovare una formula generale, la quale comprenda tutti questi valori di x e di y. Chi ne fosse curioso, potrà vederla nelle *Memorie di Berlino dell' anno* 1768. *a pag*. 123. Se fosse stato richiesto il più piccolo valore positivo, che può prendere la nostra formula, questo valore sarebbe $=2$, il quale corrisponde nella prima serie ad A'', e nella seconda ad A'''.

82.

Da questi principj il Sig. *de la Grange* ha dedotta la risoluzione in numeri interi dell' equazione $Ax^2+B=y^2$. S'incominci dal riflettere, che se x e B hanno un fattore comune a, anche y conterrà il medesimo fattore, e quindi $B=y^2-Ax^2$ dovrà esser divisibile per a^2. Onde se B non contiene alcun fattore quadrato, x e B dovranno esser tra loro numeri primi. Ma se B contiene un solo fattor quadrato a^2, x potrà esser primo con B, o contenere il fattore a. Nel primo caso risolveremo l' equazione $y^2-Ax^2=B$ supponendo x e B primi tra loro, nel secondo risolveremo l' equazione $y^2-Ax^2=\frac{B}{a^2}$ ponendo x e $\frac{B}{a^2}$ numeri tra loro primi, e poi moltiplicheremo i valori di x e di y per a. Se B conterrà due fattori quadrati a^2 e b^2, converrà prima risolvere l' equazione $y^2-Ax^2=B$ nella ipotesi di x e B tra loro primi, poi l' equazione $y^2-Ax^2=\frac{B}{a^2}$ nella supposizione che x e $\frac{B}{a^2}$ siano primi, e finalmente l' equazione $y^2-Ax^2=\frac{B}{b^2}$ nella ipotesi di x e $\frac{B}{b^2}$ primi tra loro. I valori di x e di y ottenuti nel secondo e nel terzo caso si moltiplicheranno poi respettivamente per a, o per b. E così in seguito.

In tutti questi casi adunque l' equazione si ridurrà alla forma $y^2-Ax^2=B$, ove x e B sono tra loro numeri primi, e converrà che y^2-Ax^2 sia divisibile per B. Si faccia (64) $y=nx-Bz$,

e l'equazione data diventerà $(n^2-A)x^2-2nBxz+B^2z^2=B$; e siccome x è primo con B, dovrà essere n^2-A divisibile per B. Si cerchi un numero n tale che sia $\frac{n^2-A}{B}$ eguale ad un numero intero C, e si avrà l'equazione

$$Cx^2-2nxz+Bz^2=1,$$

ove per n si potranno prendere tanto positivamente che negativamente tutti quei numeri $<\frac{B}{2}$ che rendono $\frac{n^2-A}{B}$ un numero intero, omessi quei valori di n, che sono $>\frac{B}{2}$ (64). Se non si trovasse alcun valore di n, che avesse queste condizioni, bisognerebbe concludere che l'equazione $y^2-Ax^2=B$ non è risolubile in numeri interi. Ma se troviamo uno o più valori soddisfacienti di n, gli considereremo successivamente uno dopo l'altro, e faremo il discorso seguente:

Siccome le quantità C, n, B, x e z sono numeri interi, la formula $Cx^2-2nxz+Bz^2$ sarà sempre un numero intero, e l'unità sarà perciò il più piccolo valore positivo che essa possa avere, se pure non potesse diventar zero, il qual caso per ora escludiamo, perchè ne parleremo poi separatamente. Si cerchi adunque col metodo precedente il più piccolo valore che possa ricevere questa formula, e se esso si trova eguale all'unità, avremo la risoluzione dell'equazione $Cx^2-2nxz+Bz^2=1$, cioè della proposta $Ax^2+B=y^2$: se no, siamo certi che essa non è risolubile in numeri interi. Convien pertanto distinguere due casi, secondo che la quantità $4n^2-4BC=4A$ sarà positiva o negativa.

Se A è una quantità negativa, si convertirà la frazione $\frac{n}{C}$ presa positivamente in frazion continua, e formatene le frazioni convergenti verso di essa si prenderanno i numeratori per x ed i denominatori per z, e quelle supposizioni che rendono la formula $Cx^2-2nxz+Bz^2$ eguale all'unità, risolveranno il problema. Onde apparisce che il numero delle soluzioni sarà in questo caso sempre limitato.

Se A è una quantità positiva, poichè $D=4A$, prenderemo i segni di n e di $\sqrt{A}$ in modo che la quantità $\frac{n\pm\sqrt{A}}{C}$ diventi positiva, poi faremo il calcolo seguente:

$$\begin{array}{lll} -n, & C, & \lambda < \frac{n \pm \sqrt{A}}{C} \\ n' = \lambda C - n\,, & C' = \frac{n'^2 - A}{C} & \lambda' < \frac{-n' \mp \sqrt{A}}{C'} \\ n'' = \lambda' C' + n', & C'' = \frac{n''^2 - A}{C'} & \lambda'' < \frac{-n'' \pm \sqrt{A}}{C''} \\ \text{ec.} & \text{ec.} & \text{ec.} \end{array}$$

finchè ritornino insieme due termini corrispondenti nella prima e nella seconda serie. E se nella seconda serie troviamo alcuna delle quantità C, C', ec. eguale all'unità, avremo altrettante soluzioni della proposta; se nò essa non sarà risolubile in numeri interi. Per avere i valori di x e di z si formeranno le frazioni convergenti verso la frazion continua $\lambda + \cfrac{1}{\lambda' + \cfrac{1}{\lambda'' + \text{ec.}}}$, e la frazione corrispondente a quella delle quantità C, C', ec., che è eguale all'unità, ci darà nel numeratore il valore di x e nel denominatore quello di z.

Se A fosse un quadrato $= a^2$, avremmo il caso, in cui la formula $Cx^2 - 2nxz + Bz^2$ può divenire zero, perchè può risolversi in due fattori razionali. Infatti questa formula è eguale a $\frac{(Cx - nz)^2 - Az^2}{C}$, la quale nel caso di $A = a^2$ si può mettere sotto la forma $\frac{[Cx \pm (n+a)z][Cx \pm (n-a)z]}{C}$. Ora essendo $\frac{n^2 - a^2}{C} = \frac{(n+a)(n-a)}{C} = B$, dovrà essere il prodotto $(n+a)(n-a)$ divisibile per C, e quindi se C si risolve in due fattori b e c, dovrà essere uno dei numeri $n+a$, $n-a$ divisibile per b, e l'altro per c. Sia dunque $n+a = fb$, $n-a = gc$, ove f e g sono numeri interi, e i due fattori della quantità $Cx^2 - 2nxz + Bz^2$ saranno $cx \pm fz$, $bx \pm gz$: e dovendo questi esser numeri interi, bisogna che ciascuno di essi sia $= \pm 1$. Si faccia pertanto $cx \pm fz = \pm 1$, $bx \pm gz = \pm 1$, e da quest'equazioni si deducano i valori di x e z; i quali se riesciranno interi, ci daranno la soluzione bramata, se nò la proposta non sarà solubile in numeri interi.

Ma nel caso di $A = a^2$ si può il problema risolvere più facilmente nel modo seguente. Siccome l'equazione $y^2 - a^2 x^2 = B$

si può mettere sotto la forma $(y+ax)(y-ax)=B$, se chiamiamo b e c i due fattori di B, avremo $y+ax=\pm b$, $y-ax=\pm c$; e da quest' equazioni si dovranno dedurre i valori di x ed y, i quali, se saranno interi, risolveranno il problema.

Esempio I.

Si debba risolvere in numeri interi l'equazione $y^2+3x^2=124$. Siccome 124 contiene il fattore 4 che è un quadrato, dovremo prima risolvere l'equazione $y^2+3x^2=124$ considerando x e 124 come primi tra loro, poi l'equazione $y^2+3x^2=31$ riguardando x e 31 come numeri tra loro primi. Cerco primieramente il numero n tale, che sia n^2+3 divisibile per 124, e trovo per n i numeri 11 e 51, che sono i soli tra i minori di $\frac{124}{2}$, che soddisfacciano. Facendo dunque $y=11x-124z$ ottengo l'equazione

$$x^2-22xz+124z^2=1,$$

e siccome A è negativa, i valori di x e z non potranno che essere eguali respettivamente ai numeratori ed ai denominatori delle frazioni $\frac{1}{0}$, e $\frac{11}{1}$: la prima supposizione soltanto mi rende la formula $x^2-22xz+124z^2$ eguale all' unità; onde deduco la soluzione $x=1$, e $z=0$, cioè $x=1$, ed $y=11$.

Se prendo l'altro valore di n, e faccio $y=51x-124z$, ho l'equazione

$$21x^2-102xz+124z^2=1.$$

Risolvo in frazion continua la quantità $\frac{51}{21}=\frac{17}{7}$, e trovo le frazioni convergenti verso di essa $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{17}{7}$, i numeratori ed i denominatori delle quali devo tentare respettivamente in luogo di x e di z. Ora indicando per X la quantità $21x^2-102xz+124z^2$ io trovo

x	z	X
1	0	21
2	1	4
5	2	1
17	7	7

dunque ho una nuova soluzione ponendo $x=5$, $z=2$, cioè $x=5$, $y=7$.

Adesso per risolvere l'equazione $y^2+3x^2=31$, cerco un numero n tale, che sia n^2+3 divisibile per 31, e trovo $n=11$, e questo è il solo valore soddisfaciente di n, che sia $<\frac{31}{2}$. Pongo $y=11x-31z$, ed ottengo l'equazione

$$4x^2-22xz+31z^2=1 .$$

Riduco in frazion continua la frazione $\frac{11}{4}$, e trovate le frazioni convergenti $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{11}{4}$, pongo di esse i numeratori per x, i denominatori per z, e denotando per X la quantità $4x^2-22xz+31z^2$ ritrovo

x	z	X
1	0	4
2	1	3
3	1	1
11	4	12,

ed ho una soluzione dell'equazione $y^2+3x^2=31$ facendo $x=3$, $z=1$, cioè $x=3$, $y=2$. Questi valori di x e di y soddisfaranno alla proposta se gli moltiplicherò per 2, e fatto ciò diverranno $x=6$, $y=4$. Onde la proposta ammette in numeri interi tre soluzioni, che sono $x=1$, 5, 6, e rispettivamente $y=11$, 7, 4.

ESEMPIO II.

Sia proposto di risolvere in numeri interi l'equazione $y^2-x^2=63$, ove A è un quadrato.

Il numero 63 può essere il prodotto di due fattori in tre maniere, le quali ci danno $63=63.1=21.3=9.7$. Dalla prima combinazione ricaviamo $y+x=63$, $y-x=1$, cioè $y=32$, $x=31$, dalla seconda $y+x=21$, $y-x=3$, cioè $y=12$, $x=9$, e dalla terza $y+x=9$, $y-x=7$, cioè $y=8$, $x=1$. E queste sono le soluzioni dell'equazione proposta.

ESEMPIO III.

Si debbano trovare le soluzioni in numeri interi dell'equazione $y^2-13x^2=101$.

Cerco primieramente il numero n tale, che sia n^2-13 divisibile per 101; trovo $n=35$, e questo è il solo valore soddisfaciente di n, che sia $<\frac{101}{2}$. Faccio perciò $y=35x-101z$, ed ottengo l'equazione

$$12x^2-70xz+101z^2=1 .$$

Siccome A è positiva, convien convertire in frazione continua la quantità $\frac{\pm 35 \pm \sqrt{13}}{12}$, la quale perchè riesca positiva bisogna prender sempre il segno superiore di 35, e l'uno o l'altro segno di $\sqrt{13}$. Prendo in primo luogo $\sqrt{13}$ positivamente, e fò il calcolo seguente:

$$\begin{array}{lll}
n = -35, & C = 12, & \lambda < \frac{35+\sqrt{13}}{12} = 3, \\
n' = 36-35 = 1, & C' = \frac{1-13}{12} = -1, & \lambda' < \frac{-1-\sqrt{13}}{-1} = 4, \\
n'' = -4+1 = -3, & C'' = \frac{9-13}{-1} = 4, & \lambda'' < \frac{3+\sqrt{13}}{4} = 1, \\
n''' = 4-3 = 1, & C''' = \frac{1-13}{4} = -3, & \lambda''' < \frac{-1-\sqrt{13}}{-3} = 1, \\
n^{IV} = -3+1 = -2, & C^{IV} = \frac{4-13}{-3} = 3, & \lambda^{IV} < \frac{2+\sqrt{13}}{3} = 1, \\
n^{V} = 3-2 = 1, & C^{V} = \frac{1-13}{3} = -4, & \lambda^{V} < \frac{-1-\sqrt{13}}{-4} = 1, \\
n^{VI} = -4+1 = -3, & C^{VI} = \frac{9-13}{-4} = 1, & \lambda^{VI} < \frac{3+\sqrt{13}}{1} = 6, \\
n^{VII} = 6-3 = 3, & C^{VII} = \frac{9-13}{1} = -4, & \lambda^{VII} < \frac{-3-\sqrt{13}}{-4} = 1. \\
n^{VIII} = -4+3 = -1, & C^{VIII} = \frac{1-13}{-4} = 3, & \lambda^{VIII} < \frac{1+\sqrt{13}}{3} = 1, \\
n^{VIIII} = 3-1 = 2, & C^{VIIII} = \frac{4-13}{3} = -3, & \lambda^{VIIII} < \frac{-2-\sqrt{13}}{-3} = 1, \\
n^{X} = -3+2 = -1, & C^{X} = \frac{1-13}{-3} = 4, & \lambda^{X} < \frac{1+\sqrt{13}}{4} = 1, \\
n^{XI} = 4-1 = 3, & C^{XI} = \frac{9-13}{4} = -1, & \lambda^{XI} < \frac{-3-\sqrt{13}}{-1} = 6, \\
n^{XII} = -6+3 = -3, & C^{XII} = \frac{9-13}{-1} = 4, &
\end{array}$$

e qui mi fermo, perchè $n^{XII} = n''$, e $C^{XII} = C''$. Siccome nella serie delle quantità C, C', C'', ec. si trova $C^{VI} = 1$, l'equazione proposta sarà risolubile, e per avere i valori di x e z con-

da ambe le parti si potranno prendere le ascisse AP. Ma se ponghiamo i valori positivi alla destra del punto A, le ascisse Ap' prese dalla parte sinistra esprimeranno i valori negativi. Infatti se, chiamando $RA=a$, prendiamo il punto R per principio dei valori di una nuova variabile x', è chiaro che otterremo il medesimo punto P della retta, o ponendo $x'=a+x$, se è data $x=AP$, o $x=x'-a$, se è data $x'=RP$. Ma se x' è positiva e $<a$, il valore di x sarà negativo, e siccome l'estremità p' dell'ascissa Rp' cadrà in tal caso alla sinistra del punto A, così il valore negativo di x dovrà prendersi dalla parte sinistra del punto A. È del tutto arbitrario il prendere una parte o l'altra per i valori positivi, ma fissata questa una volta, i valori negativi saranno contenuti nella parte opposta.

Vediamo adesso, come si possa esprimere geometricamente qualunque funzione della variabile x. Sia y questa funzione di x, e siccome per qualunque dato valore di x la funzione y acquista un valore determinato, presa (Fig. 8) la retta RS per rappresentare i valori di x, a qualunque ascissa determinata AP si applichi in P perpendicolarmente la retta PM eguale al valore corrispondente di y, e se egli è positivo si prenda PM sopra la retta RS, se è negativo si prenda PM al di sotto. La figura rappresenta una funzione tale di x, che posta $x=0$, il valore di y è positivo ed $=AB$; posta $x=AP$, diventa $y=PM$, se $x=AD$, è $y=0$, e se $x=AP'$, la funzione y acquista un valore negativo, onde l'applicata $P'M'$ cade al disotto della retta RS. Similmente per i valori negativi di x, all'ascissa AP'' corrisponde l'applicata $P''M''$ positiva, ad $x=-AE$ corrisponde $y=0$, all'ascissa AP''' corrisponde l'applicata negativa $P'''M'''$.

Se tutti i valori di y, che convengono ai valori di x, si esprimeranno in questa maniera per mezzo delle applicate PM, l'estremità di queste applicate presenteranno una linea o retta o curva, la natura della quale dipenderà dalla funzione y. E questa curva si conoscerà perfettamente, perchè tutti i di lei punti son determinati dalla funzione y: infatti se da ciascun punto della curva si tira una perpendicolare alla retta RS, si conoscerà il valore di x, e quindi l'applicata corrispondente. Come le funzioni si richiamano alle linee curve, così viceversa le curve si riducono alle funzioni. Poichè la natura di una curva è espressa da una data funzione di x, la qual funzione dà la

lunghezza delle perpendicolari PM, mentre le distanze AP sono rappresentate dalla variabile x. Convien qui fare attenzione ad alcuni nomi che sono in uso: la retta RS, nella quale si prendono i valori di x, si chiama l'*asse* della curva, il punto A, dal quale incominciano i valori di x, si chiama il *principio* o l'*origine* delle ascisse, le perpendicolari PM eguali ai valori della funzione y si chiamano le *applicate* o le *ordinate*, le quali si dicono *ortogonali* o *rettangole*, se sono perpendicolari alle ascisse, come le abbiamo fin qui supposte. Ma può accadere, che esse formino un angolo obliquo con l'asse, nel qual caso si dicono *obliquangole*. Finalmente le ascisse e le ordinate insieme considerate si dicono le *coordinate* della curva, o siano ortogonali o obliquangole: ma si devono reputar sempre ortogonali, se il contrario espressamente non si avverte.

84.

Essendo y una funzione di x, sarà data una equazione tra y ed x, la quale si dice che esprime la natura della curva, ed i varj generi delle curve si dovranno ripetere dalla diversità delle loro equazioni. Primieramente adunque, come le funzioni, così le curve si divideranno in *algebraiche* e *trascendenti*, secondo che la loro equazione sarà algebraica o trascendente: le curve algebraiche si chiamano ancora *geometriche*, e *meccaniche* le trascendenti. Ma ciò che specialmente importa per la cognizione delle curve, si è l'osservare se y è una funzione *uniforme* o *moltiforme* della variabile x, cioè se a ciascun valore di x corrispondono uno o più valori di y. Sia y primieramente una funzione uniforme di x, e siccome dando qualunque valore ad x abbiamo un solo valore per y, la curva sarà tale, che da qualunque punto dell'asse tirata una perpendicolare PM taglierà sempre la curva in un solo punto M. E siccome l'asse si estende da ambe le parti all'infinito, la curva ancora scorrerà da una parte e dall'altra all'infinito, ed accompagnerà l'asse con un tratto continuo, il quale è espresso dalla Fig. 8.ª

Sia y una funzione *biforme* di x, cioè sia $y^2 = 2Py - Q$, essendo P e Q funzioni uniformi di x. Avremo $y = P \pm \sqrt{(P^2 - Q)}$, ed a ciascuna ascissa x corrisponderanno due valori dell'applicata y, i quali saranno reali o immaginarj, secondo che sarà $P^2 > Q$, o $P^2 < Q$. Nel primo caso (Fig. 9) all'ascissa AP corri-

sponderanno due applicate reali PM, PM': nel secondo l'ascissa Ap non avrà alcuna applicata. Ma dall'esser $P^2 > Q$ non potrà divenire $P^2 < Q$, se prima non si abbia il caso di $P^2 = Q$: quindi ove cessano le applicate reali, come in C ed in G, sarà $y = P \pm o$, o sia le due applicate diventeranno eguali, e la curva volgerà indietro il suo corso. La curva adunque può essere in questo caso composta di parti tra loro disunite $MBDB'M'$, $FM''HM'''$, le quali però prese insieme costituiscono una sola curva continua.

Sia y una funzione triforme di x, cioè sia determinata dalla equazione $y^3 + Py^2 + Qy + R = o$. Avrà in questo caso y tre valori, i quali o saranno tutti reali, o uno reale e gli altri immaginarj. Quindi tutte le applicate taglieranno la curva o in tre punti, o in un solo, fuorchè dove più punti d'intersezione si riuniscono insieme; ma siccome y ha sicuramente un valore reale, la curva si estenderà all'infinito da ambe le parti. O sarà dunque composta di un solo tratto continuo, come nella Fig. 10.ª, o di più parti tra loro staccate, come nella Fig. 11.ª, le quali tutte compongono la curva data.

Sia y una funzione quadriforme, cioè l'equazione della curva sia $y^4 + Py^3 + Qy^2 + Ry + S = o$, ed a ciascun valore di x corrisponderanno quattro valori reali di y, o due, o nessuno. Quindi le ordinate incontreranno la curva o in quattro punti, o in due, o in nessuno, i quali casi sono tutti espressi dalla Fig. 12.ª

Onde in generale apparisce, che se nella equazione della curva y è elevata alla potenza n, il numero delle ordinate reali sarà o n, o $n-2$, o $n-4$, o $n-6$, ec. Se dunque n è un numero dispari, la curva avrà per lo meno un ramo che scorre all'infinito, e se dalla medesima parte più rami vanno all'infinito, il loro numero sarà sempre dispari: ma se n è pari, il numero dei rami infiniti sarà pari. Se poi si contano tutti i rami, che da una parte e dall'altra scorrono all'infinito, il loro numero sarà pari, comunque sia n o pari o dispari.

CAPITOLO VIII.

Della permutazione delle coordinate, e dei diversi ordini delle curve.

85.

Siccome la posizione dell'asse, e l'origine delle ascisse dipendono dal nostro arbitrio, la medesima curva mutate le coordinate potrà rappresentarsi da infinite differenti equazioni. Ma se sarà data l'equazione della curva per un dato asse, se ne potrà facilmente dedurre l'equazione della medesima per un altro asse qualunque. Sia qualsivoglia curva (Fig. 13) riferita all'asse RS, e sia data l'equazione della medesima tra le coordinate $AP=x$, e $PM=y$, e si voglia l'equazione della curva per un altro asse rs, ove l'origine delle ascisse sia in D, tra le coordinate $DQ=t$, e $QM=u$. Si tiri DG perpendicolare, e DO parallela all'asse RS, e siccome il nuovo asse rs è dato di posizione, si conoscerà l'angolo ODs, di cui si chiami il seno m, ed il coseno n, così che sia $m^2+n^2=1$; inoltre sia $AG=a$, $DG=b$. Tirate le rette Op, Oq perpendicolari alle nuove coordinate DQ, QM, sarà $Op=m(x+a)$, $Dp=n(x+a)$, $Oq=m(y+b)$, $Mq=n(y+b)$; onde $t=Dp-Oq=n(x+a)-m(y+b)$, $u=Mq+Op=m(x+a)+n(y+b)$. Quindi si deduce $mu+nt=(m^2+n^2)(x+a)$, ed $nu-mt=(m^2+n^2)(y+b)$, cioè $x=mu+nt-a$, $y=nu-mt-b$; i quali valori sostituiti nella equazione data ci somministreranno l'equazione della curva riferita all'asse rs.

Poste le medesime denominazioni, se vorremo adesso che una nuova applicata TM formi con l'ascissa DT un angolo dato ϕ, di cui sia il seno $=m'$, il coseno $=n'$, chiamando DT r, e TM z avremo $\frac{MQ}{MT}=\frac{u}{z}=\text{sen.}MTQ=m'$, onde $u=m'z$, e $\frac{QT}{MT}=\frac{r-t}{z}=n'$, cioè $t=r-n'z$. Sostituendo adunque questi valori di u e di t avremo $x=nr-(nn'-mm')z-a$, ed $y=-mr+(m'n+mn')z-b$. Se ponghiamo nella equazione data questi valori di x e di y, avremo l'equazione generale della curva riferita a qualunque asse con qualsivoglia inclinazione delle

coordinate, la quale comprenderà tutte l'equazioni particolari della medesima curva. Si osservi, che essendo nei valori di x e di y una sola la dimensione di r e di z, in qualunque modo trasformiamo l'equazione della curva mutando le coordinate, essa rimarrà sempre del medesimo ordine.

86.

Abbiamo divise le curve in algebraiche e trascendenti; ma in tanta copia di curve algebraiche è necessaria una ulteriore divisione. Nel distinguere le diverse specie dobbiamo por mente a qualche carattere, il quale non vari mai nella istessa curva, nè possa in vigor di esso una medesima curva appartenere a differenti specie. Abbiamo osservato di sopra, che una curva riferita a qualunque asse mantiene sempre la sua equazione del medesimo ordine. Quindi dall'ordine dell'equazione delle curve possiamo ripetere la loro distribuzione in classi. Se dunque nella equazione di una linea la massima dimensione delle variabili x ed y è l'unità, diremo questa linea essere del primo ordine; se le variabili avranno due dimensioni, la linea sarà del second'ordine, e così in seguito.

L'equazione generale delle linee del prim'ordine sarà pertanto $ay+bx-c=o$, ove le quantità costanti a, b, c, possono essere e positive e negative. In quest'ordine non è compresa alcuna curva, ma l'equazione appartiene sempre ad una linea retta, che si può costruire così. Si prenda (Fig. 14) la retta RS per asse, e il punto A sia l'origine delle ascisse, e siccome facendo $y=o$ abbiamo $x=\frac{c}{b}$, prendiamo $AD=\frac{c}{b}$, e la retta passerà pel punto D. Similmente facendo $x=o$ abbiamo $y=\frac{c}{a}$ onde al punto A corrisponde l'ordinata $AE=\frac{c}{a}$. Per i punti D ed E si faccia passare la retta LL', e questa sarà la linea rappresentata dall'equazione data. Perchè prendendo qualunque ascissa $AP=x$, a cui corrisponda l'applicata $PM=y$ avremo sempre $PM : PD=AE : AD$, cioè $y : \frac{c}{b}-x=\frac{c}{a} : \frac{c}{b}$, e moltiplicando gli estremi ed i medj termini di questa proporzione $\frac{cy}{b}=\frac{c^2}{ab}-\frac{cx}{a}$, o sia $ay+bx-c=o$, che è l'istessa equazione proposta.

Se $b=o$, sarà $AD=\frac{c}{o}=\infty$; onde la retta LL' non incontrerà mai l'asse, cioè gli sarà parallela. Se poi $a=o$, allora sarà $AE=\infty$, e la retta LL' sarà parallela alla retta AE, o sia perpendicolare all'asse. Finalmente se $c=o$, sarà $AD=o$, $AE=o$, onde la retta LL' passerà pel punto A. Per trovare un altro punto supponghiamo $x=a$, ed avremo $ay+ab=o$, cioè $y=-b$. Quindi presa l'ascissa $AC=a$, e l'ordinata $CF=b$ dalla parte inferiore, perchè il valore di $CF=y$ è negativo, la retta cercata passerà per i punti A, ed F. Questi tre casi sono espressi nella Fig. 15.ª

L'equazione generale delle linee del second'ordine sarà $ay^2+byx+cx^2+dy+ex+f=o$. Le linee curve contenute in quest'ordine sono le più semplici di tutte, perchè il prim'ordine non contiene alcuna curva. Le costanti a, b, c, ec. si possono determinare in modo, che quella equazione rappresenti tutte le diverse curve, che volgarmente si chiamano le *Sezioni Coniche*, come tra poco vedremo. Similmente l'equazione delle linee del terz'ordine sarà $ay^3+by^2x+cyx^2+dx^3+ey^2+fxy+gx^2+hy+ix+k=o$, e così in seguito.

Data dunque l'equazione di una curva, dalla massima dimensione delle variabili si potrà subito giudicare, a qual'ordine la curva appartenga. Ove conviene osservare, che, se l'equazione contiene radicali o frazioni, prima di giudicare dell'ordine della curva bisogna ridurre l'equazione ad una forma intera. Così l'equazione $y^2=x\sqrt{(a^2+x^2)}$ essendo del quarto ordine, se si libera dai radicali, ci darà una curva del quarto ordine: parimente la curva espressa dalla equazione $y^2=\frac{a^4-a^2x^2}{a^2+xy}$ sarà del quart'ordine.

Determinato l'ordine della curva, per ben conoscerla bisogna che sia dato ancora l'angolo formato dalle coordinate, poichè la medesima equazione appartiene a diverse curve, secondo che le coordinate sono ortogonali o obliquangole. Così l'equazione $y^2=a^2-x^2$ appartiene al circolo, se le coordinate sono ortogonali, all'*ellisse*, se sono obliquangole.

Finalmente conviene osservare, se l'equazione della curva è risolubile in fattori razionali, perchè se comprenderà due o più di tali fattori, sarà composta di due o più equazioni, cia-

scuna delle quali darà una curva particolare. Coteste equazioni moltiplicate insieme danno l'equazione proposta, e siccome questa operazione può dipendere dal nostro arbitrio, così dobbiamo reputare, che l'equazione data non esprima in tal caso una sola curva continua, ma una curva composta di più curve continue, che chiameremo *complessa*. Così l'equazione $y^2-ay-xy+ax=0$, quantunque sembri essere di una linea del second'ordine, pure potendosi mettere sotto la forma $(y-x)(y-a)=0$, contiene le due equazioni $y-x=0$, $y-a=0$, ciascuna delle quali rappresenta una linea retta.

CAPITOLO IX.

Delle linee del second' ordine.

87.

Per conoscere le varie specie di curve, che son comprese nella equazione generale delle linee del second'ordine

$$ay^2+byx+cx^2+dy+ex+f=0,$$

ponghiamo $y=z-\frac{bx+d}{2a}$, ed ordinando i termini avremo

$$4a^2z^2+(4ac-b^2)x^2+(4ae-2bd)x+4af-d^2=0.$$

Onde se facciamo $A=\frac{d^2-4af}{4a^2}$, $B=\frac{2bd-4ae}{4a^2}$, $C=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, l'equazione delle linee del second'ordine diventerà

$$z^2=A+Bx+Cx^2.$$

Ora è chiaro, che la diversità delle linee contenute in questa equazione dovrà ripetersi dai coefficienti A, B, e C. Ma dalla loro diversa quantità non può arguirsi la differenza delle curve, poichè l'equazione esprimerà sempre la medesima curva, allorchè permutate le coordinate le quantità A, B, e C diventeranno maggiori o minori. Rimane dunque a ricercare la differenza delle curve ne'diversi segni delle quantità A, B, e C. Ma cangiata l'origine delle ascisse la quantità A può mutare il segno, e B diventa negativa se si pone $-x$ in luogo di x, quantunque nell'uno e nell'altro caso la curva rimanga la medesima; qualunque permutazione poi non induce alcuna variazione nel segno del coefficiente C: quindi dal segno di questo coefficiente dovrà ripetersi la diversità delle curve.

Sia primieramente C una quantità positiva, e posta $x=\infty$ la quantità $A+Bx+Cx^2$ avrà un valore positivo; onde z avrà due valori reali corrispondenti all'ascissa $x=\infty$. Similmente, posta $x=-\infty$, z ottiene due valori reali corrispondenti all'ascissa $x=-\infty$. Quindi, essendo C positiva, la curva ha quattro rami, che scorrono all'infinito, e si chiama *Iperbola*.

Sia C negativa, e posto tanto $x=\infty$, che $x=-\infty$, la quantità $A+Bx+Cx^2$ sarà negativa, ed i valori di z immaginarj. La curva adunque non ha alcun ramo infinito, ma è tutta contenuta in uno spazio finito. Questa specie di linee del second'ordine si chiama *Ellisse*.

Se C svanisce, ne nasce la terza specie di curve, che hanno il nome di *Parabole*, e la natura di queste curve è espressa dalla equazione $z^2=A+Bx$. Ponendovi $x=\infty$ la quantità $A+Bx$ è positiva, e z ha due valori reali, e perciò la Parabola ha due rami infiniti. Nè può averne più di due, perchè posta $x=-\infty$, il valore di z diventa immaginario. Abbiamo supposto B positiva, ma niente importa se sarà negativa, perchè posto nella equazione $-x$ in luogo di x la curva non si cangia.

Abbiamo pertanto tre diverse specie di linee del second'ordine, l'Ellisse, la Parabola, e l'Iperbola, e la loro diversità dipende dal numero de' rami infiniti; perchè l'Ellisse non ha alcun ramo infinito, la Parabola ne ha due, e l'Iperbola quattro. Vediamo adesso quando l'equazione generale presenta ciascuna di queste specie. Primieramente la curva sarà una Ellisse, se C è <0, ma $C=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$; dunque l'equazione generale darà una Ellisse quando $4ac>b^2$, cioè quando la quantità $ay^2+byx+cx^2$ (che contiene tutti i termini, ne'quali le variabili formano due dimensioni) avrà i fattori immaginarj. La curva sarà una Iperbola, quando $C>0$, cioè $b^2>4ac$, o sia quando la quantità $ay^2+byx+cx^2$ si potrà risolvere in fattori reali disuguali. Finalmente la curva sarà una Parabola, se $C=0$, o sia $b^2=4ac$, cioè se la quantità $ay^2+byx+cx^2$ avrà due fattori eguali.

88.

Passiamo a trattare in particolare di ciascuna di queste linee, ed in primo luogo parliamo dell'Ellisse. La di lei equazione è $y^2=A+Bx-Cx^2$, o sia posto $x+\frac{B}{2C}$ in luogo di x,

$y^2=A-Cx^2$, ove A e C sono quantità positive. Siano ortogonali le coordinate, e presa la retta AB per asse (Fig. 16) sia C il principio delle ascisse. Se facciamo $x=0$, abbiamo due valori reali di y, cioè $y=\pm\sqrt{A}$, i quali sono tra loro eguali in quantità, ma uno è positivo e l'altro è negativo. Tirata dunque pel punto C perpendicolarmente all'asse la retta DE si prenda $CD=CE=\sqrt{A}$, e la curva passerà per i punti D ed E. Facendo adesso $y=0$ avremo due valori di x, cioè $x=\pm\sqrt{\frac{A}{C}}$; onde prese sull'asse da una parte e dall'altra le rette $CA=CB=\sqrt{\frac{A}{C}}$, i due punti A e B apparterranno alla curva. Per gli altri valori CP dell'ascissa x l'ordinata y avrà due valori eguali PM, PM', i quali saranno reali se $CP<CA$, immaginarj se $CP>CA$, come apparisce dalla equazione. E siccome posto $-x$ in luogo di x il valore di y rimane lo stesso, l'ellisse avrà quattro parti simili ed eguali tra loro AE, BE, BD, AD. Le rette AB, DE si chiamano gli assi dell'ellisse, e la maggiore AB l'asse maggiore, la minore DE l'asse minore.

Facciamo l'asse $AB=2a$, e $DE=2b$; sarà $a^2=\frac{A}{C}$, $b^2=A$, onde $C=\frac{A}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}$. Sostituiti questi valori l'equazione dell'ellisse diventerà $y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$, cioè $a^2y^2=b^2(a^2-x^2)$; e siccome $a^2-x^2=(a+x)(a-x)$, sarà $y^2:(a-x)(a+x)=b^2:a^2$, cioè starà sempre il quadrato di qualunque ordinata PM al rettangolo di AP in BP nella ragione costante di $b^2:a^2$, che è la proprietà principale dell'Ellisse. Se $a=b$, cioè se i due assi sono eguali, allora l'equazione $y^2=a^2-x^2$ appartiene al circolo, di cui il centro è C, ed il diametro $AB=2a$; infatti in questo caso $x^2+y^2=\overline{CP}^2+\overline{PM}^2=\overline{CM}^2=a^2$, cioè tutte le rette tirate dal centro alla periferia sono eguali, che è la proprietà essenziale del circolo: il cerchio adunque è una specie di ellisse.

Essendo $y^2=\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}$, se facciamo $x^2=a^2-b^2$, sarà $y^2=\frac{b^4}{a^2}$, cioè $y=\pm\frac{b^2}{a}$. Se dunque prendiamo le ascisse CF, Cf eguali a $\sqrt{(a^2-b^2)}$, le ordinate GG', gg' saranno ciascuna

$=\frac{2b^2}{a}$, cioè sarà $AC : CD = CD : FG$, ed $AC : CD = CD : fg$. I punti F, f determinati in tal modo hanno molte belle proprietà, e perciò hanno meritato un nome particolare; si chiamano cioè i *fuochi* dell'ellisse, l'ordinata FG il *mezzo parametro*, e tutta la GG' il *parametro* della ellisse. Da qualunque punto M preso nel perimetro dell'ellisse si tirino ai fuochi le rette MF, Mf, e sarà $\overline{FM}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{PM}^2 = [\sqrt{(a^2-b^2)}-x]^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$

$= a^2 - 2x\sqrt{(a^2-b^2)} + \frac{a^2-b^2}{a^2} x^2 = \left(a - x\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}\right)^2$, ed

$FM = a - x\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}$. In simil guisa troverassi

$fM = a + x\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}$; onde $FM + fM = 2a$. Se dunque dai fuochi a qualunque punto M dell'ellisse si conducano le rette FM, fM, la loro somma è $= AB =$ all'asse maggiore.

Finora abbiamo supposte le coordinate ortogonali, cerchiamo adesso l'equazione dell'ellisse tra le applicate obliquangole. Si tiri adunque (Fig. 17) all'asse l'applicata obliquangola QM sotto l'angolo CQM, di cui il seno sia m ed il coseno n, e si chiami CQ t, e QM u, e condotta l'applicata rettangola PM sarà $\frac{PM}{QM} = \text{sen.} CQM$, $\frac{PQ}{QM} = \cos. CQM$, cioè $\frac{y}{u} = m$, $\frac{t-x}{u} = n$, e quindi $y = mu$, ed $x = t - nu$. Sostituiti questi valori nell'equazione $a^2y^2 = b^2(a^2-x^2)$ avremo l'equazione

$$u^2 - \frac{2b^2n}{a^2m^2+b^2n^2}\,tu - \frac{a^2b^2-b^2t^2}{a^2m^2+b^2n^2} = 0,$$

la quale ci dà due valori di u, cioè QM, e $-QM'$, ove queste si prende negativo, perchè cade dall'altra parte dell'asse. Ora in ogni equazione essendo il prodotto delle radici eguale all'ultimo termine, avremo $QM \times QM' = \frac{b^2(a^2-t^2)}{a^2m^2+b^2n^2} = \frac{b^2 . AQ \times BQ}{a^2m^2+b^2n^2}$; onde $QM \times QM' : AQ \times BQ = b^2 : a^2m^2+b^2n^2$. Similmente $qm \times qm' : Aq \times Bq = b^2 : a^2m^2+b^2n^2$; perciò, ovunque si prenda il punto Q, i rettangoli $QM \times QM'$, $AQ \times BQ$ staranno nella ragione costante di $b^2 : a^2m^2+b^2n^2$: e se la retta OT parallela alle ordinate toccherà la curva in O, nel qual caso QM e QM' sono

eguali ad OT, sarà $\overline{OT}^2 : AT \times BT = b^2 : a^2m^2 + b^2n^2$.

La somma delle radici di una equazione è eguale al coefficiente del secondo termine col segno mutato; quindi $MQ - M'Q = \frac{2b^2nt}{a^2m^2+b^2n^2} = \frac{2b^2n}{a^2m^2+b^2n^2} \times CQ$. Parimente $mq + m'q = \frac{2b^2n}{a^2m^2+b^2n^2} \times Cq$, e se la retta OT parallela alle ordinate tocca la curva nel punto O, sarà $2OT = \frac{2b^2n}{a^2m^2+b^2n^2} \times CT$, onde $2OT : MQ - M'Q = CT : CQ$. Quindi, se dal punto O si tira al centro la retta OC, questa divide in mezzo in R tutte le applicate MM' parallele alla tangente OT: poichè $2OT : 2QR = CT : CQ$, e perciò $2QR = MQ - M'Q$, cioè $MQ - QR = M'Q + QR$, ed $MR = M'R$. La retta CO per questa sua proprietà si chiama *diametro*, e la retta CN tirata pel centro C parallelamente ad OT, che ha le medesime proprietà per le sue applicate, si chiama il di lei *diametro conjugato*. Infiniti pertanto sono i diametri dell'Ellisse, perchè ogni retta, che passa per il centro, è un diametro,

Sia dunque FG (Fig. 18) un diametro, che taglia in mezzo tutte le sue applicate MM', ed IH il di lei diametro conjugato, e posta $CR = r$, $RM = s$ trasferiamo l'equazione dell'Ellisse alle coordinate CR, ed RM. Sarà primieramente $QR = \frac{QM - QM'}{2} = \frac{b^2nt}{a^2m^2+b^2n^2}$, dipoi chiamando p il seno dell' angolo CRQ avremo $CR : CQ = \text{sen.}\,CQR : \text{sen.}\,CRQ$, cioè $r : t = m : p$, e $t = \frac{pr}{m}$. Sarà altresì $\frac{b^2nt}{a^2m^2+b^2n^2} + s = u$, o sia $u = \frac{b^2npr}{m(a^2m^2+b^2n^2)} + s$, i quali valori di t e di u sostituiti nella equazione precedente ci daranno la nuova equazione

$$(a^2m^2+b^2n^2)s^2 + \frac{a^2b^2p^2}{a^2m^2+b^2n^2}r^2 - a^2b^2 = 0 .$$

Se adesso facciamo prima $s = 0$, poi $r = 0$, troveremo il semidiametro $CF = \frac{\sqrt{(a^2m^2+b^2n^2)}}{p}$, ed il semidiametro conjugato $CH = \frac{ab}{\sqrt{(a^2m^2+b^2n^2)}}$, e quindi $CF \times CH = \frac{ab}{p} = \frac{AC \times CD}{\text{sen.}\,FCI}$, la

qual'equazione ci avverte, che di tutti i rettangoli formati da due diametri conjugati quello degli assi è il più piccolo. Chiamiamo $CF\ c$, $CH\ d$, e l'equazione precedente diventerà $c^2s^2=d^2(c^2-r^2)$, che è affatto simile a quella trovata per l'asse AB; onde quelle medesime proprietà, che convengono alle coordinate dell'asse, competeranno ancora alle coordinate di un diametro qualunque, e perciò sarà primieramente $\overline{RM}^2 : FR\times GR$ nella ragione costante di $d^2 : c^2$, di poi condotte le rette qualunque SS', TT', ec., saranno i rettangoli $SV\times VS'$, $FV\times VG$, $TV\times VT'$, ec. in ragion costante tra loro, ovunque si prenda il punto V, purchè le rette SS', TT', ec. si mantengano tra loro respettivamente parallele.

Vediamo adesso, come dall'angolo CQM, che ha m per seno, ed n per coseno dipendano gli angoli ACF, ICF. Dal centro C (Fig. 19) tirata CS perpendicolare alla retta MM' avremo $\frac{CS}{RS}=\text{tang.}CRS=\text{tang.}ICF$; ma $CS=m\times CQ$,

$RS=QS-QR=n\times CQ-QR$: dunque $\text{tang.}ICF=\frac{m\times CQ}{n\times CQ-QR}$ $=\frac{mt}{nt-QR}=\frac{m(a^2m^2+b^2n^2)}{n(a^2m^2+b^2n^2-b^2)}=\frac{a^2m^2+b^2n^2}{mn(a^2-b^2)}$, a motivo di $m^2+n^2=1$. Avendo adunque supposto $\text{sen.}ICF=p$, avremo $\text{tang.}ICF=\frac{p}{\sqrt{(1-p^2)}}=\frac{a^2m^2+b^2n^2}{mn(a^2-b^2)}$, onde si deduce

$p^2=\frac{(a^2m^2+b^2n^2)^2}{m^2n^2(a^2-b^2)^2+(a^2m^2+b^2n^2)^2}$, e quindi

$\overline{CF}^2=\frac{a^2m^2+b^2n^2}{p^2}=\frac{m^2n^2(a^2-b^2)^2+(a^2m^2+b^2n^2)^2}{a^2m^2+b^2n^2}$

$=\frac{m^2a^4+n^2b^4}{a^2m^2+b^2n^2}=a^2+b^2-\frac{a^2b^2}{a^2m^2+b^2n^2}$; ma $\frac{a^2b^2}{a^2m^2+b^2n^2}=\overline{CI}^2$, perciò $\overline{CF}^2+\overline{CI}^2=a^2+b^2$, cioè i quadrati di due diametri conjugati sono eguali ai quadrati degli assi.

Condotta dal punto R la retta RT perpendicolare all' asse avremo $\text{tang.}ACF=\frac{RT}{CT}=\frac{m\times QR}{CQ-n\times QR}=\frac{m\times QR}{t-n\times QR}=\frac{b^2n}{a^2m}$. Quindi si ricava la maniera di tirare la tangente a qualunque punto F dell'Ellisse. Sia FO questa tangente, che incontri l'asse in O, e sarà FO parallela all'ordinata MM', e perciò la tangen-

te dell' angolo AOF sarà $=\frac{m}{n}$. Tirando FP perpendicolare all' asse avremo $\frac{m}{n}=\frac{FP}{PO}=\frac{y}{PO}$, e quindi tang. $ACF=\frac{y}{x}=\frac{b^2.PO}{a^2y}$, e $PO=\frac{a^2y^2}{b^2x}=\frac{a^2-x^2}{x}$. Sarà dunque $CO=x+\frac{a^2-x^2}{x}=\frac{a^2}{x}$, cioè $x:a=a:CO$, o sia $CP:CA=CA:CO$.

Tirando dai fuochi $F.f$ (Fig. 20) le rette FM, fM ad un punto qualunque M della curva, avremo $FO=CO-CF=\frac{a^2-x\sqrt{(a^2-b^2)}}{x}$, ed $fO=\frac{a^2+x\sqrt{(a^2-b^2)}}{x}$: ma $FM=\frac{a^2-x\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}$, ed $fM=\frac{a^2+x\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}$; dunque $FO:FM=a:x=fO:fM$. Ora stà $FO:FM=$ sen. FMO: sen. FOM, $fO:fM=$ sen. fMO: sen. FOM; perciò sen. $FMO=$ sen. fMO, e l' angolo $FMO=$ all' angolo fMo.

Se p, e q sono due qualunque semidiametri conjugati, ed s l' angolo che formano al centro, avremo pq sen. $s=ab$, e $p^2+q^2=a^2+b^2$, per mezzo delle quali equazioni dati gli assi e l' angolo s si troveranno i semidiametri p, e q, o pure dati gli assi ed il rapporto de' semidiametri si troverà l' angolo s. Così, se p e q dovranno essere eguali tra loro, avremo sen. $s=\frac{ab}{p^2}$, e $2p^2=a^2+b^2$, cioè sen. $s=\frac{2ab}{a^2+b^2}$. Sarà dunque l' angolo s eguale all' angolo DBE, cioè i semidiametri CM, CN saranno paralleli alle corde BE, BD, e saranno ciascuno $=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{2}}$; inoltre sarà $CP=\frac{a}{\sqrt{2}}$, e $PM=\frac{b}{\sqrt{2}}$. L' equazione dell' Ellisse riferita a questi semidiametri eguali avrà la forma $y^2=c^2-x^2$, cioè sarà l' equazione medesima del cerchio tra le coordinate ortogonali.

Se le ascisse, invece d' incominciare dal centro C, hanno la loro origine nel punto A, che si chiama il *vertice* dell' ellisse, posto (Fig. 16) $AP=x$. $PM=y$, l' equazione dell' ellisse diventerà $y^2=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2$, ove il coefficiente $\frac{2b^2}{a}$ è eguale al

parametro. Ponghiamo il semiparametro, o l'applicata FG nel fuoco $=c$, e la distanza AF del fuooo dal vertice $=d$, ed avremo $\frac{b^2}{a}=c$, $a-\sqrt{(a^2-b^2)}=d$, e quindi $2a-d=a+\sqrt{(a^2-b^2)}$, $(2a-d)d=b^2=ac$, ed $a=\frac{d^2}{2d-c}$. Sarà dunque $y^2=2cx-\frac{c(2d-c)}{d^2}x^2$, la qual' equazione usar si deve, quando è data la distanza del fuoco dal vertice, ed il semiparametro. Sempre però convien che sia $2d>c$, perchè $a=\frac{d^2}{2d-c}$, e $b=\sqrt{ac}=d\sqrt{\frac{c}{2d-c}}$.

89.

Se sarà $2d=c$, avremo $y^2=2cx$, la qual' equazione è per la parabola, perchè l'equazione precedente $y^2=A+Bx$ si cangia in questa mutata l'origine delle ascisse. Sia data la parabola MAM' (Fig. 21), e posta $AP=x$, $PM=y$ la di lei natura sarà espressa dalla equazione $y^2=2cx$. Sarà poi $AF=d=\frac{c}{2}$, ed il semiparametro $FG=c$, e quindi $\overline{PM}^2=2FG\times AP$: e siccome posta l'ascissa x infinita le applicate PM, PM' diventano infinite, la curva avrà due rami infiniti AM, AM'. Se si prende l'ascissa negativa, l'applicata diventa immaginaria; onde al di là del punto A non si trova alcuna porzione di curva.

Siccome l'equazione dell'ellisse si cangia in quella della parabola, allorchè si pone $2d=c$, è evidente che la parabola è una ellisse, di cui il semiasse maggiore $a=\frac{d^2}{2d-c}$ è infinito: onde tutte le proprietà dell'ellisse potranno trasferirsi alla parabola, se si pone a infinita. E primieramente essendo per l'ellisse $FM=a-\frac{(a-x)\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}=a-\frac{(a-x)(a-d)}{a}=\frac{a(d+x)-dx}{a}$, se facciamo a infinita, poichè la quantità dx svanisce in paragone dell'infinita $a(d+x)$, avremo nella parabola $FM=\frac{a(d+x)}{a}=d+x=\frac{1}{2}c+x$, cioè $FM=AP+AF$. Condotta la tangente MO, è $PO=\frac{a^2-(a-x)^2}{a-x}=\frac{2ax-x^2}{a-x}$ nella ellisse, e per-

ciò posta a infinita sarà $PO=\frac{2ax}{a}=2x=2AP$ nella parabola. Le applicate parallele alla tangente MO saranno divise nel mezzo dal diametro, che dal punto M và al centro. Ma poichè il centro della parabola è situato ad una distanza infinita, i diametri della parabola incontreranno l'asse ad una distanza infinita, cioè saranno tutti tra loro paralleli. Nella medesima maniera dalle proprietà della ellisse si potranno dedurre le corrispondenti proprietà della parabola.

90.

Passiamo all'iperbola, l'equazione della quale abbiamo sopra veduto essere $y^2=A+Bx+Cx^2$, e mutate le coordinate $y^2=A+Cx^2$. La quantità C dev'esser sempre positiva, ma la quantità A può esser positiva e negativa. Siccome poi ponendo x in luogo di y e viceversa si cangia il segno di A, prendiamo A negativa, e l'equazione della iperbola sarà $y^2=Cx^2-A$. Facendo $y=0$ abbiamo da questa equazione un doppio valore di x, cioè $x=+\sqrt{\frac{A}{C}}$, ed $x=-\sqrt{\frac{A}{C}}$, onde se prendiamo (Fig. 22) il punto C per origine delle ascisse, e la retta AB per asse, e ponghiamo $AC=BC=\sqrt{\frac{A}{C}}$, i punti A e B saranno nella iperbola. Qui ancora il punto C si chiama il centro, e la retta AB l'asse della iperbola, e se facciamo il semiasse $AC=a$, a motivo di $a^2=\frac{A}{C}$, l'equazione della iperbola diventerà $y^2=Cx^2-Ca^2$. Quando adunque x è $>a$, le applicate vanno continuamente crescendo, e finalmente diventano infinite; e siccome le ascisse si devono prendere da una parte e dall'altra del centro, l'iperbola avrà quattro rami infiniti, tutti eguali e simili tra loro, AI, Ai, BK, Bk. Se x è $<a$, l'applicata è sempre immaginaria; onde per tutta la lunghezza dell'asse AB non si trova alcuna porzione di curva. Pertanto non ha l'iperbola, come l'ellisse, l'asse conjugato, perchè l'applicata nel centro $=\sqrt{-Ca^2}$ è immaginaria. Ma, per conservare una qualche somiglianza con l'ellisse, ponghiamo questo semiasse immaginario della iperbola $=b\sqrt{-1}$, e sarà $b^2=Ca^2$, e $C=\frac{b^2}{a^2}$, onde l'equazione della iper-

bola sarà $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$; e quindi l' equazione dell'ellisse si cangia in quella della iperbola, se vi si pone $-b^2$ in luogo di b^2. Pertanto le proprietà dell'ellisse si potranno facilmente adattare all'iperbola, e primieramente la distanza dei fuochi dal centro essendo nell'ellisse $=\sqrt{(a^2-b^2)}$, sarà nell'iperbola $CF=Cf=\sqrt{(a^2+b^2)}$. Quindi

$$FM=\sqrt{\left(x^2-2x\sqrt{(a^2+b^2)}+a^2+\frac{b^2x^2}{a^2}\right)}=\frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}-a,$$

$fM=\frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}+a$, e perciò $fM-FM=2a=AB$, che è la proprietà principale de'fuochi dell'iperbola. Similmente come per l'ellisse si troverà, che ogni retta, la quale passa per il centro, è un diametro dell'iperbola, che divide in mezzo tutte le sue applicate; e le altre proprietà dell'ellisse con qualche mutazione, quando vi è implicato l'asse conjugato, avranno luogo anche nella iperbola. Così, condotta la tangente MO, sarà anche nell'iperbola $CP:AC=AC:CO$, cioè $CO=\frac{a^2}{x}$, e con un raziocinio simile a quello usato di sopra (88) si dimostrerà, che l'angolo FMO è eguale all'angolo fMO.

Essendo $CO=\frac{a^2}{x}$, è evidente, che quanto maggiore si prende l'ascissa $CP=x$, tanto minore sarà la distanza CO. Onde se x si suppone infinita, sarà $CO=0$, e la retta, che tocca la curva ad un infinita distanza, passerà per il centro C; e come la tangente dell'angolo POM è $=\frac{PM}{PO}=\frac{xy}{x^2-a^2}$ e posta x infinita diventa $y=\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}=\frac{bx}{a}$, la retta, che tocca la curva in un punto infinitamente distante, forma con l'asse un angolo, la di cui tangente è $=\frac{b}{a}$. Se adunque nel vertice A (Fig. 23) si pone perpendicolarmente all'asse $AD=b$, la retta CD prolungata all'infinito non incontra mai la curva, ma la curva sempre più vi si avvicina, finchè poi all'infinito si confonde con essa. Lo stesso si deve dire della parte Ck, la quale finalmente si confonde con il ramo Bk, e se si pone $Ad=AD$, la retta Cd

avrà la medesima proprietà riguardo ai rami Ai, BK. Queste rette che non toccano la curva, che ad infinita distanza, si chiamano *Asintote* della medesima curva. Se $b=a$, sarà $AC=AD$, cioè l'angolo ACD semiretto, e l'angolo DCd retto, e in questo caso l'iperbola si dice *equilatera*.

Si prolunghi l'applicata MPM', finchè incontri gli asintoti in m, m', e sarà $Pm=Pm'=\frac{bx}{a}$, onde $Mm=M'm'=\frac{bx-ay}{a}$, ed $Mm'=M'm=\frac{bx+ay}{a}$, e quindi
$Mm\times Mm'=M'm'\times M'm=\frac{b^2x^2-a^2y^2}{a^2}=b^2=\overline{AD}^2$. Si tiri Mr parallela all'asintoto Cd, la quale incontri in r l'altro asintoto CD, ed avremo $Mr:Mm=Cd:Dd$, cioè
$Mr=mr=\frac{Mm\times\sqrt{(a^2+b^2)}}{2b}=\frac{(bx-ay)\sqrt{(a^2+b^2)}}{2ab}$, e
$Cr=Cm-rm=\frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}-\frac{(bx-ay)\sqrt{(a^2+b^2)}}{2ab}$
$=\frac{(bx+ay)\sqrt{(a^2+b^2)}}{2ab}$. Quindi avremo
$Mr\times Cr=\frac{(b^2x^2-a^2y^2)(a^2+b^2)}{4a^2b^2}=\frac{a^2+b^2}{4}$, o sia tirando a Cd parallela la retta $AE=\frac{1}{2}Cd=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$, $Mr\times Cr=\overline{AE}^2$. Se dunque prendiamo sopra uno degli asintoti l'ascissa $CQ=u$, e l'applicata $QN=z$ parallela all'altro asintoto, posta $CE=e$, l'equazione dell'iperbola riferita agli asintoti sarà $uz=e^2$.

Fin qui abbiamo rappresentate le Sezioni Coniche con una equazione tra le applicate parallele. Ma vi è un'altra maniera per rappresentar le curve, mediante la quale esse si riferiscono alle applicate, che partono da un punto fisso, e formano un angolo con una retta data di posizioue, la quale passa pel punto fisso. Se è data una equazione tra quest'angolo, e l'applicata, si potranno determinare tutti i punti della curva, poichè ad ogni angolo corrisponderà un dato valore dell'applicata, e condotta questa, la di lei estremità ci darà un punto della curva. Facciamo l'applicazione di questa nuova maniera alle sezioni Coniche, e cerchiamo l'equazione dell'ellisse tra la retta $FM=z$, che

parte dal fuoco F (Fig. 16), e l'angolo $AFM=u$, che la retta FM forma coll'asse. Avremo $\frac{PM}{FM}=\text{sen}.AFM$, $\frac{PF}{FM}=-\cos.AFM$, cioè $y=z\,\text{sen}.u$, $x=\sqrt{(a^2-b^2)}+z\cos.u$, e sostituendo questi valori nell'equazione $y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$ otterremo

$$z^2\overline{\text{sen}.u}^2=b^2-\frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2}-\frac{2b^2z\sqrt{(a^2-b^2)}\cos.u}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}z^2\overline{\cos.u}^2$$

cioè, a motivo di $\overline{\text{sen}.u}^2=1-\overline{\cos.u}^2$,

$$z^2=\frac{b^4}{a^2}-\frac{2b^2z\sqrt{(a^2-b^2)}\cos.u}{a^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2}z^2\overline{\cos.u}^2,$$

ed estraendo la radice quadrata

$$z=\frac{b^2}{a+\sqrt{(a^2-b^2)}\cos.u}.$$

Se noi ponghiamo la distanza $\sqrt{(a^2-b^2)}$ del centro dal fuoco, che si chiama l'*eccentricità*, $=e$, l'equazione dell'ellisse diventerà

$$z=\frac{a^2-e^2}{a+e\cos.u}.$$

Questa equazione si trasferirà all'iperbola, se vi porremo $-b^2$ in luogo di b^2, e diventerà

$$z=\frac{-b^2}{a+\sqrt{(a^2+b^2)}\cos.u},$$

e posta l'eccentricità $\sqrt{(a^2+b^2)}=e$,

$$z=\frac{a^2-e^2}{a+e\cos.u}.$$

La medesima equazione adunque appartiene egualmente all'ellisse ed all'iperbola; ma è chiaro che sarà dell'ellisse, se $e<a$, e dell' iperbola, se $e>a$.

Se si osserva che $e=\sqrt{(a^2-b^2)}=a-d$, ove d esprime la distanza AF del fuoco dal vertice, l'equazione dell'ellisse potrà rappresentarsi ancora così;

$$z=\frac{2ad-d^2}{a+(a-d)\cos.u}.$$

Posto l'asse a infinito, sarà

$$z=\frac{2d}{1+\cos.u},$$

e questa è l'equazione della parabola.

Abbiamo percorse le proprietà principali delle linee del second'ordine, le quali comunemente si chiamano *sezioni coniche*, perchè nascono dalla sezione fatta nel cono da diversi piani. Quello che abbiamo detto, basta per conoscere la natura di queste curve: chi desidera di più, consulti gli Autori, che trattano di esse in particolare, e specialmente il *Trattato delle Sezioni Coniche* del Sig. *Marchese de l'Hospital*.

CAPITOLO X.

De' rami infiniti delle curve.

91.

Abbiamo veduto, che delle linee del second'ordine una è tutta contenuta in uno spazio finito, un'altra ha due rami infiniti, un'altra finalmente ne ha quattro. Una maggior varietà si troverà nelle linee degli ordini superiori; onde per ben distinguere le differenti curve, che sono in ciascun'ordine comprese, si rende necessario un metodo atto a conoscere il numero de' rami infiniti di una curva, di cui è data l'equazione, e la loro direzione. Sia adunque proposta l'equazione di una curva dell'ordine n tra le coordinate x cd y, nella quale il *membro supremo*, che contiene cioè i termini della più alta dimensione n, sarà della forma

$$Ay^n + By^{n-1}x + Cy^{n-2}x^2 \; \ldots\ldots + Nx^n .$$

Se facciamo $y = rx$, l'equazione della curva divisa per x^n diventerà

$$\begin{aligned} &Ar^n + Br^{n-1} + Cr^{n-2} \; \ldots\ldots + N \\ &+ \frac{R}{x} + \frac{R'}{x^2} + \frac{R''}{x^3} + \text{ec.} = 0 , \end{aligned}$$

ove R, R', ec. sono funzioni di r. Posta x infinita svaniranno i termini $\frac{R}{x}$, $\frac{R'}{x^2}$, ec., e l'equazione si ridurrà alla seguente

$$Ar^n + Br^{n-1} + Cr^{n-2} \; \ldots\ldots + N = 0 ,$$

dalla quale si dovrà ricavare il valore di r. Ora se questa equazione avrà tutte le radici immaginarie, nel qual caso saranno

immaginarj tutti i fattori del membro supremo, all'ascissa x infinita non corrisponderà un valore reale dell'applicata y, e la curva perciò non avrà alcun ramo infinito. Ma se un valore di r sarà reale ed $=\frac{b}{a}$, al quale corrisponderà il fattore reale $ay-bx$ del membro supremo, in tal caso all'ascissa x infinita apparterrà l'applicata reale $y=\frac{bx}{a}$, e la curva avrà un ramo infinito.

Per conoscere l'andamento del ramo infinito di curva, che da questo fattore reale $ay-bx$ dipende, ponghiamo l'equazione della curva data sotto la forma

$$M+M'+M''+M'''+\text{ec.}=0,$$

ove M contiene tutti i termini di n dimensioni, M' quei di $n-1$ dimensioni, M'' quelli di $n-2$ dimensioni, e così in seguito. La quantità M ha per fattore $ay-bx$, cioè è $=P(ay-bx)$; onde la precedente equazione può anche disporsi così:

$$ay-bx=-\frac{M'}{P}-\frac{M''}{P}-\frac{M'''}{P}-\text{ec.}$$

Ora se nel secondo membro di questa equazione ponghiamo $\frac{b}{a}x$ in luogo di y, essa diventerà

$$ay-bx=\alpha+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}+\frac{\delta}{x^3}+\text{ec.},$$

ove α, β, γ, ec. son quantità costanti, e la curva di questa equazione ci darà nel caso di x infinita il medesimo valore dell'applicata y che l'equazione proposta, cioè la curva di questa equazione all'infinito si confonderà con la curva data, o sia ne sarà l'asintoto. Se nel secondo membro trascuriamo tutti i termini fuorchè il primo, l'equazione $ay-bx=\alpha$ ci darà l'asintoto rettilineo della curva data. Ma per determinare la direzione de'due rami di curva, che convergono verso questo asintoto rettilineo, ammettiamo anche il termine $\frac{\beta}{x}$ trascurati gli altri, ed avremo l'equazione $ay-bx=\alpha+\frac{\beta}{x}$ di una curva, che all'infinito si confonde con la proposta, e nella quale perciò la direzione de'rami infiniti sarà la medesima. Ma se β fosse $=0$, allora si prenderebbe il termine $\frac{\gamma}{x^2}$ trascurati i seguenti, e se anche

γ fosse $=0$, si ammetterebbe il termine $\frac{\delta}{x^3}$, e così in seguito: in modo che l'equazione della curva, che all'infinito si confonde con la proposta, sarà della forma $ay-bx=\alpha+\frac{\beta}{x^m}$.

Siano (Fig. 24) AP, PM le coordinate x ed y, e tirando la retta AQ, che formi l'angolo PAQ, di cui la tangente sia $\frac{b}{a}$, avremo $AQ=\frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}$, $PQ=\frac{bx}{a}$, e $QM=\frac{ay-bx}{a}$. Se adunque riferiamo la curva alle coordinate $AQ=t$, e $QM=u$, l'equazione dell'asintoto rettilineo sarà $au=\alpha$, e quindi presa $QC=\frac{\alpha}{a}$, e condotta per C la retta LL' parallela ad AQ, sarà questa l'asintoto. L'equazione della curva, che più da vicino si accosta alla proposta, sarà della forma $z=\frac{\beta}{t^m}$, posta $z=u-\frac{\alpha}{a}$, cioè prese le ascisse BC sull'asintoto LL', ove convien distinguere due casi, secondo che m è pari o dispari. Sia m un numero dispari, e siccome posta t negativa il valore di z diventa negativo, la curva avrà due rami infiniti, uno Ii dalla parte delle coordinate positive, e l'altro Kk dalla parte delle coordinate negative. Se poi m è pari, poichè presa t negativa il valore di z si mantiene positivo, la curva avrà due rami Ii, Oo situati il primo dalla parte delle coordinate positive, il secondo dalla parte delle t negative e delle z positive.

Da ogni fattore semplice della quantità M ne nasceranno nella curva due rami infiniti, la posizione de' quali si determinerà come sopra. Ma se la quantità M avesse un fattore doppio $(ay-bx)^2$, il metodo precedente non potrà adoprarsi, perchè anche P conterrà il medesimo fattore $ay-bx$, e perciò posto $y=\frac{bx}{a}$, tutti i termini α, β, γ, ec. diventeranno infiniti.

92.

Per vedere, che cosa succeda in questo caso, riferiamo la curva data alle coordinate t ed u, e posta l'equazione di essa come sopra sotto la forma $M+M'+M''+M'''+\text{ec.}=0$, sarà,

poichè la quantità M è divisibile per $(ay-bx)^2$ o sia per u^2,

$$M=Au^2t^{n-2}+A'u^3t^{n-3}+A''u^4t^{n-4}+\text{ ec.}$$
$$M'=Bt^{n-1}+B'ut^{n-2}+B''u^2t^{n-3}+\text{ ec.}$$
$$M''=Ct^{n-2}+C'ut^{n-3}+\text{ ec.}$$
$$\text{ec.}$$

Posta t infinita, l'equazione della curva diventa

$$Au^2t^{n-2}+Bt^{n-1}=0,$$

cioè $Au^2+Bt=0$, la quale appartiene alla parabola; onde la curva data avrà due rami, che all'infinito si confonderanno con la parabola.

Ciò è vero se B non è zero; ma se il coefficiente B è $=0$, posta t infinita l'equazione diventerà

$$Au^2t^{n-2}+B'ut^{n-2}+Ct^{n-2}=0,$$

cioè $Au^2+B'u+C=0$. Se le radici di questa equazione saranno immaginarie, la curva non avrà alcun ramo infinito corrispondente al fattore $(ay-bx)^2$; ma se quelle radici son reali, la curva avrà più rami infiniti. Per conoscerne il numero e la posizione, siano primieramente c e d le due radici reali e disuguali di quella equazione, e si ponga $u-c=\frac{I}{t^k}$; sostituendo questo valore di u nell'equazoine data potremo determinare l'esponente k ed il coefficiente I, e quindi sarà data la posizione di due rami infiniti, e nell'istesso modo troveremo que'due, che competono al fattore $u-d$. Se le due radici c e d sono eguali, ponghiamo $u-c=\frac{I}{t^k}$, e sostituendo questo valore nella equazione, e trascurando i termini più piccoli in paragone de'più grandi, nel caso di t infinita avremo $\frac{I^2}{t^{2k}}+\frac{AI}{t^{k+m}}+\frac{B}{t^n}=0$, per mezzo della qual'equazione dobbiamo determinare l'esponente k ed il coefficiente I. Riguardo all'esponente k dobbiamo fare in modo, che due esponenti di t siano eguali, e l'altro maggiore. Convien distinguere tre casi, secondo che n è eguale, maggiore, o minore di $2m$.

Sia primieramente $n=2m$, e se nell'equazione $\frac{I^2}{t^{2k}}+\frac{AI}{t^{k+m}}+\frac{B}{t^{2m}}=0$ paragoniamo due qualunque termini tra loro, troveremo sempre $k=m$, e l'equazione diventerà $I^2+AI+B=0$. Se le radici di questa equazione sono immaginarie, la curva non avrà alcun ramo infinito; ma se le radici α e β son reali, la curva avrà quattro rami infiniti rappresentati dall'equazioni $u-c=\frac{\alpha}{t^m}$, $u-c=\frac{\beta}{t^m}$.

Sia in secondo luogo $n>2m$, e l'equazione $\frac{I^2}{t^{2k}}+\frac{AI}{t^{k+m}}+\frac{B}{t^n}=0$, posto $2k=k+m$, cioè $k=m$, diventerà $\frac{I^2}{t^{2m}}+\frac{AI}{t^{2m}}+\frac{B}{t^n}=0$, cioè $I+A=0$, perchè il terzo termine svanisce a motivo di $n>2m$. Se paragoniamo il primo termine col terzo avremo $k=\frac{n}{2}$, e quindi $\frac{I^2}{t^n}+\frac{AI}{t^{m+\frac{n}{2}}}+\frac{B}{t^n}=0$, la qual'equazione non può sussistere posta t infinita, perchè si ridurrebbe al solo secondo termine, a motivo di $m<\frac{n}{2}$, e quindi $m+\frac{n}{2}<n$. Finalmente se paragoniamo il secondo termine col terzo avremo $k=n-m$, e l'equazione diventerà $\frac{I^2}{t^{2n-2m}}+\frac{AI}{t^n}+\frac{B}{t^n}=0$, o sia $AI+B=0$, perchè $n>2m$, cioè $2n-2m>n$, e quindi svanisce il primo termine. Nel caso adunque di $n>2m$ la curva avrà quattro rami infiniti rappresentati dall'equazioni $u-c=-\frac{A}{t^m}$, ed $u-c=-\frac{B}{At^{n-m}}$.

Sia in terzo luogo $n<2m$, e paragonato il primo termine col secondo, o il secondo col terzo l'equazione prenderà le forme $\frac{I^2}{t^{2m}}+\frac{AI}{t^{2m}}+\frac{B}{t^n}=0$, $\frac{I^2}{t^{2n-2m}}+\frac{AI}{t^n}+\frac{B}{t^n}=0$, le quali non possono sussistere posta t infinita, perchè la prima si ridurrebbe al

solo terzo, e la seconda al solo primo termine. Resta dunque a paragonare il primo termine col terzo, il qual paragone ci darà $I^2 = -B$, e quindi la curva proposta all'infinito si confonderà con la curva dell'equazione $(u-c)^2 + \frac{B}{t^n} = o$.

Per conoscere la posizione de' rami indicati da questa ultima equazione $u-c = \pm \sqrt{\frac{-B}{t^n}}$, conviene osservare se n è dispari o pari. Nel primo caso è chiaro che due rami Oo, e Kk vanno di sopra e di sotto accostandosi alla retta LL' dalla parte delle ascisse negative, allorchè B è positiva; ma se B fosse negativa, questi due rami sarebbero situati dalla parte delle ascisse positive. Nel secondo caso non avremo alcun ramo infinito se B è positiva; ma quando B è negativa, avremo quattro rami infiniti Ii, Kk, Nn, Oo, i quali vanno a confondersi coll'asintoto rettilineo LL'.

93.

Passiamo al caso, in cui il membro supremo contiene il fattore $(ay-bx)^3$, e trasferendo l'equazione alle coordinate t ed u, e ponendola sotto la forma $M + M' + M'' + M''' + \text{ec.} = o$, avremo

$$M = At^{n-3}u^3 + A't^{n-4}u^4 + \text{ec.}$$
$$M' = Bt^{n-1} + B't^{n-2}u + B''t^{n-3}u^2 + B'''t^{n-4}u^3 + \text{ec.}$$
$$M'' = Ct^{n-2} + C't^{n-3}u + C''t^{n-4}u^2 + \text{ec.}$$
$$M''' = Dt^{n-3} + D't^{n-4}u + \text{ec.}$$
ec.

Posta t infinita l'equazione si cangerà nelle seguenti:

$$(1) \quad At^{n-3}u^3 + Bt^{n-1} = o,$$
$$(2) \quad At^{n-3}u^3 + B't^{n-2}u + Ct^{n-2} = o,$$
$$(3) \quad At^{n-3}u^3 + B''t^{n-3}u^2 + Ct^{n-2} = o,$$
$$(4) \quad At^{n-3}u^3 + B''t^{n-3}u^2 + C't^{n-3}u + Dt^{n-3} = o,$$

la prima delle quali ha luogo, quando B non è zero, la seconda se $B = o$, la terza se B e B' sono $= o$, e la quarta se anche $C = o$.

L'equazione (1) diventa $Au^3 + Bt^2 = 0$, e la curva proposta si confonde all'infinito con la curva rappresentata da questa equazione, la quale è espressa nella Fig. 25, cioè ha due rami infiniti AM, AM' situati dalla medesima parte dell'asse AQ, uno dal lato delle ascisse positive, e l'altra dal lato delle ascisse negative.

L'equazione (2) diventa $Au^3 + B'tu + Ct = 0$, nella quale posta t infinita, u può essere o infinita, o finita. Nel primo caso l'equazione diventa $Au^2 + B't = 0$, che appartiene alla parabola, nel secondo si cangia in $B'u + C = 0$, che rappresenta un asintoto rettilineo; e per vedere qual sia la posizione dei rami, che convergono verso questo asintoto, porremo nell'equazione proposta $u + \frac{C}{B'} = \frac{I}{t^k}$, e ne determineremo l'esponente k.

L'equazione (3) si cangia in $Au^3 + B''u^2 + Ct = 0$, nella quale posta t infinita convien che sia infinita anche u, onde in paragone del primo svanisce il secondo termine, ed essa diventa $Au^3 + Ct = 0$. La curva di questa equazione è rappresentata nella Fig. 26., ed ha due rami infiniti AM, AM', uno de' quali è situato dalla parte delle coordinate positive, e l'altro dalla parte delle coordinate negative; e con questi due rami all'infinito si confonde la curva proposta.

Finalmente l'equazione (4) $Au^3 + B''u^2 + C'u + D = 0$ ci darà un solo asintoto rettilineo, se due radici di questa equazione sono immaginarie, o tre asintoti rettilinei paralleli, se tutte le tre radici son reali. Se però due di esse fossero eguali, giungeremo come sopra a dell'equazioni della forma $u - c = \frac{A}{t^m}$, o della forma $(u-c)^2 = \frac{A}{t^m}$. Ma se anche il terzo fattore fosse eguale agli altri, ponendo $u - c = \frac{I}{t^k}$ otterremo una equazione della forma

$$\frac{I^3}{t^{3k}} + \frac{AI^2}{t^{2k+m}} + \frac{BI}{t^{k+n}} + \frac{C}{t^p} = 0,$$

ed usando il medesimo metodo di sopra troveremo che la curva all'infinito si confonde con quella dell'equazione $u - c = \frac{A}{t^m}$, o

con quella dell' equazione $(u-c)^2=\pm\frac{A}{t^m}$, o finalmente con quella dell' equazione $(u-c)^3=\frac{A}{t^m}$. Siccome converrebbe tener conto di troppi casi per trattare quella equazione in tutta la sua generalità, prendiamo un caso particolare, e supponghiamo che sia data l' equazione

$$\frac{I^3}{t^{3k}}+\frac{AI^2}{t^{2k+1}}+\frac{BI}{t^{k+3}}+\frac{C}{t^6}=0,$$

Se paragoniamo due qualunque termini tra loro troveremo per k i valori $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2$, col primo e coll' ultimo de' quali può sussistere l' equazione, ma non con gli altri. Facendo $k=1$ avremo $I^3+AI^2=0$, cioè $I=-A$, e due rami di curva si confonderanno con quelli della curva che ha per equazione $u-c=\frac{-A}{t}$. Se ponghiamo $k=2$, l' equazione diventerà $AI^2+BI+C=0$, e se questa ha le radici immaginarie, la curva non avrà per questa parte alcun' altro ramo infinito: se poi le radici α e β son reali, la curva avrà altri quattro rami infiniti rappresentati dall' equazioni $u-c=\frac{\alpha}{t^2}$, $u-c=\frac{\beta}{t^2}$.

Abbiamo veduto quali sono le curve rappresentate dall' equazioni $u-c=\frac{A}{t^m}$, ed $(u-c)^2=\frac{A}{t^m}$; vediamo adesso quali son quelle, che hanno per equazione $(u-c)^3=\frac{A}{t^m}$. Se m è un numero dispari, la curva (Fig. 24) avrà due rami Ii, Kk, il primo nella parte delle coordinate positive, e il secondo in quella delle coordinate negative: se m è un numero pari, i due rami Ii, Oo saranno ambedue situati dalla medesima parte dell' asse da un lato e dall' altro delle ascisse.

Facilmente apparisce come si debba operare per ottenere la posizione de' rami infiniti, allorchè il membro supremo ha dei fattori elevati ad una potenza maggiore della terza. Passiamo a vedere l' applicazione di questa teoria ad un esempio.

Sia proposto di trovare il numero dei rami infiniti nella curva, che ha per equazione

$$(y+x)y^2(y-x)^3-y(x^2+y^2)^2-3y^2+1=0.$$

Consideriamo in primo luogo il fattor semplice $y+x$, e ponendo l'equazione sotto la forma

$$y+x=\frac{(x^2+y^2)^2}{y(y-x)^3}+\frac{3}{(y-x)^3}-\frac{1}{y^2(y-x)^3},$$

e facendo nel secondo membro $y=-x$ avremo $y+x=\frac{1}{2}-\frac{3}{8x^3}$. Sia AP (Fig. 27) l'asse delle x, e fatto l'angolo PAQ semiretto dalla parte delle ordinate negative si prenda $QC=\frac{1}{2}$, e condotta per C la retta LL' parallela ad AQ, sarà LL' l'asintoto, al quale convergeranno i due rami Bb, $B'b'$ situati come nella figura.

Per vedere quali rami ci dà il fattor quadrato y^2, ponghiamo l'equazione proposta sotto la forma

$$\begin{aligned}&x^4y^2-2x^3y^3+2xy^5-y^6\\&+x^4y+2x^2y^3+y^5\\&+3y^2\\&-1=0,\end{aligned}$$

e posta x infinita avremo $y^2+y=0$, onde si deduce $y=0$, e $y=-1$. Quindi avremo due asintoti rettilinei, uno dei quali sarà l'asse AP, e l'altro la retta EE' parallela all'asse alla distanza $AD=1$. Per giudicare della posizione dei rami infiniti convergenti verso questi asintoti ponghiamo nella equazione precedente $y=\frac{1}{x^k}$, o $y+1=\frac{1}{x^k}$, e troveremo nel primo caso $y=\frac{1}{x^4}$,

nel secondo $y+1=\frac{2}{x}$; onde avremo quattro nuovi rami infiniti $B''b''$, $B'''b'''$ situati sopra l'asse AP, e $B^{IV}b^{IV}$, $B^{V}b^{V}$ posti sopra e sotto la retta EE', come nella figura.

Passando finalmente al fattor cubico $(y-x)^3$ facciamo l'angolo PAQ' semiretto, e trasportiamo la curva alle coordinate $AQ'=t=x\sqrt{2}$, e $Q'M=u=y-x$. L'equazione proposta diventerà

$$\frac{t^3u^3}{\sqrt{2}}+\frac{5t^2u^4}{2}+2tu^5\sqrt{2}+u^6$$
$$-\frac{t^5}{\sqrt{2}}-3t^4u-4t^3u^2\sqrt{2}-6t^2u^3-\frac{5tu^4}{\sqrt{2}}-u^5$$
$$-\frac{3t^2}{2}-3tu\sqrt{2}-3u^2$$
$$+1=0.$$

Ponendo t infinita avremo $u^3-t^2=0$: e quindi due nuovi rami della curva data si confonderanno nell'infinito con i rami *AM*, *AM'* della curva che ha per equazione $u^3-t^2=0$.

Il numero e la quantità de'rami infiniti forma una differenza essenziale nelle linee curve, e questo principio hanno con ragione adottato i Geometri per distinguere le varie specie di curve contenute in un ordine dato. Si può vedere dedotta da questo fondamento l'enumerazione delle linee del terz'ordine e del quarto nella *Introduzione* del Sig. *Euler*.

CAPITOLO XI.

Della figura delle linee curve.

94.

Nel Capitolo precedente abbiamo cercata la posizione dei rami delle curve continuati all'infinito; in questo ci proponghiamo di cercare la posizione dei rami, o sia la figura delle curve in uno spazio finito. Per descrivere la curva che corrisponde ad una data equazione, conviene per qualunque valore dell'ascissa x trovare il valore dell'applicata y. Considerata pertanto x come costante si deve dedurre dall'equazione il valore di y, il quale ci darà le ordinate corrispondenti a qualunque data ascissa. Ma se l'equazione della curva è di un grado superiore, questo valore di y non si potrà ottenere espresso per mezzo di una funzione esplicita di x. In questo caso per qualunque valor numerico di x bisogna con i metodi esposti ricavare dalla equazione numerica il valore di y, la quale operazione riesce molto laboriosa, perchè conviene tante volte risolvere una equazione del grado superiore, quanti sono i punti della curva, che si voglio-

no determinare. Se però nella equazione della curva la dimensione di una delle coordinate non è maggiore di due, la curva si può descrivere, e facilmente conoscere la di lei figura.

Sia primieramente l'equazione della curva di questa forma, $y=P$; cioè sia y una funzione razionale dell'ascissa x. La figura di queste curve si rende facilmente nota, poichè a qualunque valore dell'ascissa x corrispondendo un sol valore dell'applicata y, la curva con un tratto continuo accompagnerà l'asse all'infinito.

L'equazione della curva sia adesso $Py^2-2Qy+R=0$, ove P, Q, ed R sono funzioni razionali dell'ascissa x, ed estraendo la radice avremo $y=\frac{Q}{P}\pm\frac{\sqrt{(Q^2-PR)}}{P}$. Primieramente adunque, se sarà $Q^2>PR$, a ciascuna ascissa corrisponderà una doppia ordinata, come avviene (Fig. 28) per i tratti dell'asse PP', $P''P'''$. Le applicate diventeranno immaginarie, se sarà $Q^2<PR$, come succede nella figura per i tratti PR, $P'P''$, $P'''S$. Ma nel passaggio dalle applicate reali alle immaginarie, e viceversa, convien che sia $Q^2=PR$, cioè $y=\frac{P}{Q}$, o sia convien che l'applicata incontri la curva in un sol punto, come avviene nei punti dell'asse P, P', P'', e P'''. La curva adunque può esser composta di più parti separate tra loro, com'è quella che corrisponde alla porzione dell'asse P'' P''', le quali parti si sogliono chiamare *Ovali conjugate*.

Le ascisse pertanto AP, AP', AP'', ec. sono le radici dell'equazione $Q^2-PR=0$, e per ben conoscere la figura della curva si deve principalmente aver riguardo alla diversa costituzione di questa equazione. Se due radici di essa saranno eguali, o il punto P'' caderà sul punto P', o il punto P''' sul punto P'', cioè svanirà nell'asse o quella porzione che ha le applicate immaginarie, o quella che le ha reali. Nel primo caso la curva comparirà *annodata* (Fig. 29); nel secondo l'ovale conjugata si ridurrà ad un punto, cioè vi sarà un punto separato dal resto della curva, il quale si chiama *punto conjugato*. Se tre radici dell'equazione $Q^2-PR=0$ saranno eguali, cioè se anche il punto P''' caderà sul punto P', la parte annodata diventerà infinitamente piccola, e la curva riescirà acuminata, come nella Fig. 30; il punto K' si suol chiamare allora *cuspide* o *punto di regresso*.

Il *nodo*, o sia l'intersezione di due rami di curva si chiama punto *doppio*, perchè la retta che passa per quel punto è riputata tagliar la curva in due punti appartenenti ai due rami. Se un altro ramo di curva passa per il nodo, si ha un punto *triplo*, un punto *quadruplo*, se si riuniscono insieme due punti doppj, e un punto *moltiplice*, quando più rami della curva s'incontrano. Tutte le varietà, che si trovano nella figura di qualunque curva, sono sempre composte da quelle, che abbiamo accennate; poichè vi s'incontrano ovali conjugate, o punti moltiplici, o punti di regresso, o punti conjugati.

95.

Passiamo adesso a vedere, qual'è la figura di alcune delle più celebri curve. Sia data in primo luogo l'equazione $x^3-2ay^2+xy^2=0$, la quale appartiene ad una linea del terz'ordine, che comunemente si chiama la *Cissoide* di *Diocle*. Estraendo la radice quadrata avremo $y=\frac{\pm x\sqrt{x}}{\sqrt{(2a-x)}}=\frac{\pm x\sqrt{(2ax-x^2)}}{2a-x}$; onde presa (Fig. 31) la retta AB per asse, ed il punto A per origine delle ascisse, la curva passerà per il punto A, perchè posta $x=0$ anche y è $=0$. Se $x=2a$ sarà $y=\frac{\pm 2a\sqrt{2a}}{0}=\pm\infty$; cioè se si prende $AB=2a$, e per B si conduce la retta RR' perpendicolare all'asse, sarà questa l'asintoto della cissoide, cioè incontrerà la curva da una parte e dall'altra ad una infinita distanza. Se facciamo $x=a$, sarà $y=\frac{\pm a\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\pm a$, cioè divisa AB per mezzo in C, e tirate le applicate CD e $CD'=AC$, la curva passerà per i punti D e D'. Allorchè si prende l'ascissa x positiva e $>2a$, o pure negativa, l'applicata riesce sempre immaginaria; onde non vi sarà alcuna porzione di curva nè sopra A nè sotto B. La cissoide adunque è tale, qual'è descritta nella figura, con una cuspide in A, e l'asintoto RR'.

Per qualunque punto M della cissoide si tiri la retta AM, che incontri l'asintoto in Q, e condotta l'applicata MP sarà $\overline{AM}^2=x^2+y^2=\frac{2ax^2}{2a-x}$. Ma sta $\overline{AB}^2:\overline{AP}^2=\overline{AQ}^2:\overline{AM}^2$, cioè $\frac{x^2}{4a^2}=\frac{2ax^2}{(2a-x)\overline{AQ}^2}$; quindi $\overline{AQ}^2=\frac{8a^3}{2a-x}$, e

$QM=QA-AM=\frac{(2a-x)\sqrt{2a}}{\sqrt{(2a-x)}}=\sqrt{(4a^2-2ax)}$. Preso C per centro col raggio AC si descriva un cerchio, che passerà per D, ed incontrerà le rette PM ed AQ in N ed O, e tirata BN sarà $BN=\sqrt{\overline{AB\times BP}}=\sqrt{(4a^2-2ax)}=QM$. Quindi sarà l' angolo $AQB=$ all'angolo $QBN=$ all'angolo BNP, e perciò l'angolo $PBN=$ all'angolo BAQ; onde $AO=BN=QM$. La cissoide adunque ha questa proprietà, che tirata qualunque retta AQ, la quale tagli la curva in M, il cerchio in O, e l'asintoto in Q, è sempre $QM=AO$, o sia $AM=QO$: onde questa curva si può descrivere con molta facilità.

Sia proposta in secondo luogo l'equazione del quarto grado $(x-a)^2y^2=b^2x^2-(x-a)^2x^2$, ove $a>b$, che è della *Concoide* di *Nicomede*, ed estraendo la radice avremo
$y=\frac{\pm x\sqrt{[b^2-(x-a)^2]}}{x-a}$; onde apparisce che l'applicata svanirà in due casi, cioè allorchè sarà $x=a\pm b$. Prendendo adunque (Fig. 32) la retta CB per asse, ed il punto C per origine delle ascisse, se facciamo $CB=a+b$, e $CA=a-b$, i punti A e B saranno nella curva cercata. Se x è $>a+b$, o $<a-b$, l'applicata è sempre immaginaria, onde tutta la curva è contenuta tra i limiti A e B. Si deve eccettuare il caso di $x=0$, che ci dà $y=0$; perciò in C vi è un punto conjugato diviso da tutta la curva. Se $x=a$, sarà $y=\frac{\pm ab}{0}=\pm\infty$; e quindi divisa la retta AB per metà in D, l'applicata EF che passa per D sarà un asintoto della curva. A tutte le altre ascisse AP corrispondono due applicate eguali PM, PM', onde la curva sarà, come mostra la figura, formata di quattro rami infiniti, i quali tutti convergono all'asintoto EF. Il punto C si chiama il *polo* della *concoide*, quella porzione di curva, che è sopra l'asintoto, si dice concoide *esteriore*, quella situata sotto l'asintoto, *inferiore*.

Si tiri dal polo C a qualunque punto M della curva la retta CM, che incontri l'asintoto in L, e sarà
$CM=\sqrt{(x^2+y^2)}=\frac{bx}{x-a}$, e $CL=\frac{ab}{x-a}$; onde
$CM-CL=LM=\frac{b(x-a)}{x-a}=b=AD=BD$. Condotta adunque nel-

la concoide dal polo C la retta $CM''LM$, sarà sempre $AD=LM=LM''$; onde si deduce una maniera facile di costruir questa curva.

Sia data finalmente l'equazione del quart'ordine $(x^2+y^2)^2=a^2(y^2-x^2)$, la quale appartiene alla *Lemniscata* di *Giacomo Bernoulli*. Risoluta l'equazione sarà $y=\pm\sqrt{\left[\frac{a^2-2x^2}{2}\pm\frac{a\sqrt{(a^2-8x^2)}}{2}\right]}$, e quindi avremo quattro valori di y, se sarà $8x^2<a^2$, cioè $x<\pm\frac{a}{2\sqrt{2}}$; se poi $x>\pm\frac{a}{2\sqrt{2}}$, tutti i valori di y saranno immaginarj. I quattro valori si ridurranno a due, se $x=\pm\frac{a}{2\sqrt{2}}$, nel qual caso sarà $y=\pm\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Posta $x=0$, sarà $y=\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{2}\pm\frac{a^2}{2}\right)}$, cioè due valori di y saranno $+a$, e $-a$, e gli altri due $=0$. Sia dunque (Fig. 33) AB l'asse, e C il principio delle ascisse, e posta in C l'applicata $CD=CD'=a$, la curva passerà per i punti C, D, e D'. Si faccia $CB=CA=\frac{a}{2\sqrt{2}}$, e condotte le applicate BE, BE', AE'', $AE'''=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, i punti E, E', E'', E''' saranno nella curva. Se l'ascissa si prenderà $>CB$, le applicate saranno immaginarie, ma a tutte le ascisse $CP<CB$ corrisponderanno quattro applicate PM, PM', PM'', PM''', le due prime delle quali saranno respettivamente eguali all'ultime due, e poste in parte contraria. Quindi la Lemniscata ha un nodo in C, e le sue parti CED, $CE'D'$, $CE''D'$, $CE'''D$ sono eguali e simili.

CAPITOLO XII.

Della invenzione delle curve dalle loro date proprietà, o sia de' Luoghi Geometrici.

96.

Abbiamo veduto nel Capitolo precedente, come date l'equazioni delle curve si possono determinare i punti, e ricavarne le

proprietà: viceversa, se avremo una serie di punti, la posizione de'quali sia determinata per mezzo di una data costruzione geometrica, potremo trovare la curva, alla quale questi punti appartengono. Alle curve in tal modo considerate diedero gli antichi il nome di *luoghi Geometrici*, perchè in ciascun caso la curva cercata è realmente il luogo, in cui si trovano i punti dati. Così il circolo è il luogo di tutti i punti, che sono egualmente distanti da un punto fisso: l'ellisse è il luogo de'punti, le distanze de'quali da due punti dati prese insieme sono sempre eguali. I problemi di questa specie si chiamano ancora problemi indeterminati, perchè si deve in essi esprimere analiticamente la posizione di un punto, la quale è data mediante una costruzione geometrica, e vi sono più punti, anzi infiniti, che godono delle medesime proprietà, e soddisfanno egualmente al problema.

Per trovare l'equazione analitica, la quale esprime la natura del luogo geometrico proposto, si prenda una retta qualunque data di posizione per asse, alla quale si riferisca per mezzo di due coordinate uno dei punti dati, quindi dalle condizioni del problema si deduca una equazione tra queste coordinate, la quale determinerà la posizione dei punti dati, e sarà l'equazione della curva cercata: ed in ciò fare si usi quel medesimo metodo, che serve per i problemi puramente analitici. Questo è ciò solo che in tal materia si può generalmente accennare, poichè ciascun problema richiede particolari artifizj, i quali non si possono imparare, che coll'uso e coll'esercizio. Alcune volte ad ottenere una più semplice soluzione dei problemi basta la diversa posizione dell'asse, e delle coordinate, la quale è in nostro arbitrio. Spesso le linee date non sono sufficienti per giungere all'equazione; ma se ne devono tirare altre in modo, che paragonate con le linee date somministrino facilmente la bramata soluzione. Onde si può rilevare, quanto giovi aver presenti le proprietà delle linee rette, e specialmente ciò, che del triangolo rettangolo, e dei triangoli simili s'insegna negli Elementi di Geometria.

Prima d'inoltrarci in queste ricerche, vediamo in qual maniera si esprimano le quantità per mezzo delle linee. Fin qui abbiamo supposte le quantità espresse in numeri; onde qualunque funzione sostituiti i numeri in luogo delle lettere poteva

trattarsi con le regole dell'Aritmetica, ed ottenersene facilmente il valore. Il caso è molto diverso, se non avendo alcun riguardo ai numeri dobbiamo esprimere le quantità con le linee, cioè se dobbiamo trovare una linea retta, che sia rappresentata da una data funzione. Si debba in primo luogo costruire la quantità $\frac{ab}{c}$, ove a, b, e c rappresentano linee rette. È chiaro che sta $c : a = b : \frac{ab}{c}$; quindi prendendo (Fig. 34) due rette indefinite AZ, AY, che s'incontrino nel punto A, se facciamo $AC = c$, $AB = a$; $AD = b$, poi tirando CB se per il punto D gli conduciamo la parallela DE, che incontri in E la retta AZ, sarà $AE = \frac{ab}{c}$. Se $b = a$, coll'istesso metodo si costruirà la quantità $\frac{a^2}{c}$. Se poi fosse data la quantità $\frac{ad+bd}{c+d}$, è chiaro che essa è $= \frac{(a+b)d}{c+d}$, e si riduce al caso precedente, se $a+b$, e $c+d$ si considerano ciascuna come una sola lettera, ed a questo caso appartiene ancora la costruzione della quantità $\frac{a^2-b^2}{c}$, la quale sappiamo essere $= \frac{(a+b)(a-b)}{c}$. Se fosse proposta la quantità $\frac{abc}{de}$, la quale è $= \frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$, si costruisca prima la retta $\frac{ab}{d}$, che si chiami m, e la quantità proposta diventerà $\frac{cm}{e}$, che si costruirà come sopra.

Tutta l'arte adunque di costruire consiste nel risolvere la data quantità in più parti, ciascuna delle quali sia della forma $\frac{ab}{c}$, alla qual riduzione, che spesso non è ovvia, si può sempre giungere mediante alcune trasformazioni. Così per costruire la quantità $\frac{a^3+b^3}{a^2+c^2}$ ponghiamo $b^3 = a^2m$, $c^2 = an$, ed avremo $m = \frac{b^3}{a^2}$, $n = \frac{c^2}{a}$, onde facilmente costruiremo le quantità m ed n; ciò posto la quantità proposta diventa
$\frac{a^3+a^2m}{a^2+an} = \frac{a^2+am}{a+n} = \frac{a(a+m)}{a+n}$, cioè è ridotta alla forma cercata.

In simil guisa la costruzione di qualunque quantità razionale, nella quale il numeratore superi di una dimensione il denominatore, si ridurrà sempre all'invenzione della quarta proporzionale a tre rette date.

Ma qualunque quantità, per esser suscettibile di costruzione, convien che sia omogenea, cioè che abbia la medesima dimensione nei termini respettivamente del numeratore, ed in quei del denominatore. Riguardo a ciò si deve avvertire, che se una quantità da costruirsi non è omogenea, questo dipende dall'essere stata nella soluzione del problema posta qualche quantità $=1$; onde espressa questa quantità per mezzo di una lettera, la formula proposta diventerà omogenea. Ma non è però necessario di rifar di nuovo il calcolo, e basta moltiplicare i termini della data formula per una potestà tale di quella lettera, che si supponeva $=1$, qual'è necessaria per render la formula omogenea. Per esempio se in qualche problema giungiamo alla formula $\frac{a^3+b^2+c}{a^2+b}$, abbiamo senza dubbio supposta una quantità $=1$, la quale se avessimo chiamata e, saremmo giunti ad una formula omogenea. Questa poi sarebbe stata $\frac{a^3+b^2e+ce^2}{a^2+be}$, che diventa la proposta se si pone $e=1$.

Abbiamo supposto fin qui, che nelle formule da costruirsi il numeratore ecceda il denominatore di una dimensione; ma può il primo superare il secondo di due dimensioni, o anche di tre, ma non di più, perchè la Geometria non si avanza al di là delle tre dimensioni. E se il numeratore sarà maggiore del denominatore di due dimensioni, la formula rappresenterà una superficie, che si potrà sempre ridurre ad un rettangolo. Data per esempio la formula $\frac{a^2b+ac^2}{a+c}$ si porrà sotto la forma $\frac{a(ab+c^2)}{a+c}$, poi si costruirà la retta $m=\frac{ab+c^2}{a+c}$, e la formula proposta diventerà am, cioè sarà eguale ad un rettangolo, che abbia a per base, ed m per altezza. Se poi il numeratore supera il denominatore di tre dimensioni, la formula esprimerà un parallelepipedo. Così la quantità $\frac{a^2b^2+abc^2}{a+c}$ si riduce alla forma $\frac{ab(ab+c^2)}{a+c}$, e costrutta la retta $m=\frac{ab+c^2}{a+c}$ diventa abm, cioè è eguale al pa-

rallelepipedo rettangolo, le di cui tre dimensioni sono a, b, m.

Per dir qualche cosa delle formule irrazionali del secondo grado ponghiamo, che si debba costruire la formula $\sqrt{ab}$. È facile il vedere, che ciò si riduce alla invenzione della media proporzionale tra le rette a, e b; onde tra tutte le maniere, che per ottener ciò insegna la Geometria, quella si deve scegliere, che in ciascun caso somministra una soluzione più semplice. Se fosse data la formula $\sqrt{(a^2-b^2)}$, essa si ridurrebbe al caso precedente, se si osservasse che $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. La formula $\sqrt{(a^2+b^2)}$ rappresenterà l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, i di cui lati intorno l'angolo retto siano a e b. A questa si riduce la quantità $\sqrt{(a^2+cd)}$, se si fa $b^2=cd$, cioè se si prende una media proporzionale b tra le rette c e d. Con simili artifizj potremo costruire qualunque radicale quadrato.

97.

Premesse queste cose passiamo alla soluzione di alcuni problemi indeterminati, giacchè niente più dell' esercizio potrà renderci abili in questa parte di Analisi.

Problema I.

„ Dentro un angolo dato NAO (Fig. 35) trovare un punto „ M tale, che condotte le rette MN, MO, le quali facciano „ sempre dalla medesima parte gli angoli dati MNA, MOA, „ stia $MN : MO$ nella data ragione di $m : n$, e siccome vi sono „ infiniti punti, che hanno questa proprietà, determinare la „ linea che essi formano „.

Supponghiamo che M sia uno dei punti cercati, in modo che tirate le rette MN, MO, le quali formino gli angoli dati, sia $MN : MO = m : n$. Si tirino MP, MQ parallele ai lati dell' angolo dato, e sia $AP=x$, $PM=y$; poi prese sui lati dell' angolo dato le rette AD, AF a piacere si conducano le rette DE, FG, che incontrando in E ed in G i lati dell' angolo dato formino con essi l'angolo $AED=ANM$, e l'angolo $AGF=AOM$, e sia $DE=a$, $GF=b$, $AD=c$, $AF=d$. Posto ciò i triangoli simili PMN, ADE ci danno $AD : DE = PM : MN$, cioè $c : a = y : MN = \frac{ay}{c}$. Parimente dai triangoli QMO, AFG abbiamo $AF : FG = QM : MO$, cioè $d : b = x : MO$, e quindi

$MO = \frac{bx}{d}$. Ora dovendo essere $MN : MO = m : n$, avremo $\frac{ay}{c} : \frac{bx}{d} = m : n$, cioè $y = \frac{bcm}{adn} x$. Per render più semplice questa equazione si osservi, che possiamo prendere c, e d come ci piace; onde se facciamo $c = n$, $d = m$, avremo $y = \frac{bx}{a}$. Se dunque sulla retta AE prendiamo $AH = a = DE$, e per il punto H tiriamo parallelamente al lato AD la retta $HL = b = FG$, tutti i punti della retta indefinita AL avranno la data proprietà.

Problema II.

„ Trovare il luogo dei punti M, (Fig. 36) da' quali tirate „ ai due punti fissi A, e B le rette AM, BM, stiano queste „ nel dato rapporto di $m : n$ „.

Congiunti i punti A e B sia $AB = a$, e tirata dal punto M sulla retta AB la perpendicolare MP sia $AP = x$, $PM = y$, e quindi $BP = a - x$, $\overline{AM}^2 = x^2 + y^2$, $\overline{BM}^2 = a^2 - 2ax + x^2 + y^2$. Per la condizione del problema avremo adunque
$x^2 + y^2 : a^2 - 2ax + x^2 + y^2 = m^2 : n^2$; onde si deduce l'equazione

$$(n^2 - m^2)y^2 + (n^2 - m^2)x^2 + 2am^2x - a^2m^2 = 0.$$

Ponghiamo $x = t - \frac{am^2}{n^2 - m^2}$, e questa equazione diventerà

$y^2 + t^2 = \frac{a^2m^2n^2}{(n^2 - m^2)^2}$, la quale evidentemente appartiene al circolo. Presa perciò (N.° 1.) $AE = \frac{am^2}{n^2 - m^2}$, e col centro E e col raggio $\frac{amn}{n^2 - m^2}$ descritto un cerchio, sarà questo il luogo cercato.

Ho supposto $m < n$; se fosse $n < m$, converrebbe prendere AE (N.° 2,) dalla parte del punto B, ed $= \frac{am^2}{m^2 - n^2}$.

Se poi fosse $n = m$, l'equazione tra x ed y diventerebbe $2x - a = 0$, e quindi divisa (N.° 3.) la retta AB per mezzo in D, la retta indefinita DM perpendicolare ad AB sarà il luogo cercato.

Nei primi due casi il circolo incontra la retta AB nei punti D e D'; onde nasce una costruzione del problema molto semplice. Si cerchino sulla retta AB i punti D e D' tali, che sia

$AD:BD=AD':BD'=m:n$, ed il cerchio descritto sul diametro DD' sarà il luogo cercato.

PROBLEMA III.

„ Date di posizione le rette AB ed AC (Fig. 37) trovare il
„ punto M tale, che tirata MC al punto fisso C, ed MB pa-
„ rallela ad AC, la quale incontri in B la retta AB, sia sem-
„ pre $MB:MC=b:c$ „.

Tirata MP perpendicolare ad AC, ed MQ parallela ad AB sia $AC=a$, $AP=x$, $PM=y$, e siccome è dato l'angolo $MQP=BAC$, sarà data la ragione di $QP:PM$, la quale ponghiamo che sia quella di $b:d$. Avremo dunque $PC=a-x$, $QP=\frac{by}{d}$, $AQ=x-\frac{by}{d}=BM$, $MC=\frac{cx}{b}-\frac{cy}{d}$, ed il triangolo rettangolo MPC ci darà $y^2+a^2-2ax+x^2=\frac{c^2x^2}{b^2}-\frac{2c^2xy}{bd}+\frac{c^2y^2}{d^2}$ cioè $(b^2d^2-b^2c^2)y^2+(b^2d^2-c^2d^2)x^2+2bc^2dxy-2ab^2d^2x+a^2b^2d^2=0$. Questa equazione appartiene ad una linea del second'ordine, e da ciò che abbiamo detto di queste linee si rileva che la curva sarà una ellisse, se $c^2(b^2+d^2)<b^2d^2$, una iperbola, se $c^2(b^2+d^2)>b^2d^2$, ed una parabola se $c^2(b^2+d^2)=b^2d^2$.

PROBLEMA IV.

„ La retta BC (Fig. 38) divisa per mezzo in A giri intor-
„ no al punto A della retta immobile AD, si tiri CM perpen-
„ dicolare a BC, e presa $AD=AB$ si congiungano i punti B e
„ D: trovare il luogo dell'incontro delle rette CM, e BD „.

Dal punto M si conduca MP perpendicolare ad AD, e si ponga $DP=x$, $PM=y$, $AB=AC=AD=a$. Essendo l'angolo $PDM=BDA=CBM$, i triangoli CBM, PDM sono simili; onde $BC:BM=PD:DM$, e quindi $BM=\frac{2a\sqrt{(x^2+y^2)}}{x}$ e $BD=\frac{(2a-x)\sqrt{(x^2+y^2)}}{x}$. Dai punti B e C si tirino le rette BT, CH perpendicolari ad AD, e sarà
$DT=a-AH:BD=x:\sqrt{(x^2+y^2)}$; onde $AH=x-a$, e
$CH=\sqrt{(2ax-x^2)}$. Similmente $CH=BT:BD=y:\sqrt{(x^2+y^2)}$, cioè $CH=\frac{(2a-x)y}{x}$; e paragonando questo valore di CH con

quello trovato qui sopra avremo l'equazione $(2a-x)y^2=x^3$, la quale ci mostra la curva cercata esser la Cissoide di *Diocle*. La medesima equazione si troverà più facilmente, se si riflette che il circolo descritto sul diametro BC passerà per D, e CM sarà ad esso tangente. Onde per la nota proprietà del cerchio $BM \times DM = \overline{CM}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{CB}^2$, cioè $(2a-x)y^2=x^3$, come sopra.

Chi volesse vedere un maggior numero di problemi indeterminati risoluti, legga l'*Aritmetica Universale* di *Newton*, ed il *Trattato delle Sezioni Coniche* del Sig. Marchese *de l'Hospital*.

CAPITOLO XIII.

Della intersezione delle curve, e della costruzione dell' equazioni.

98.

Si abbiano due curve EE', FF' (Fig. 39) riferite al medesimo asse AP ed alla medesima origine delle ascisse per mezzo delle coordinate $AP=x$, $PM=y$, e siano date l'equazioni delle curve tra queste coordinate. È chiaro che al punto d'intersezione M corrisponderà in ambe le curve la medesima ascissa AP, e la medesima applicata PM; onde per avere i punti d'intersezione convien supporre in ambedue l'equazioni delle curve tanto x che y respettivamente eguali. Prendendo perciò dalla prima equazione il valore di y, e sostituendolo nella seconda, o sia eliminando y con i soliti metodi dalle due equazioni avremo una equazione in x, le radici reali della quale ci daranno le ascisse corrispondenti ai punti d'intersezione. Trovate le ascisse convien determinare le ordinate, e tra tutte le applicate, che convengono alla medesima ascissa scegliere quelle che nelle due curve sono eguali, all'estremità delle quali cadranno i punti d'incontro cercati. Sia per esempio una delle due linee una retta espressa dall'equazione $ax+by-c=0$, e l'altra una curva qualunque. Sostituito il valore di $y=\frac{c-ax}{b}$ nell' equazione della curva, in luogo di qualunque potenza di y s'introdurrà una simile potenza di $c-ax$; onde l'equazione in x sarà

di un grado eguale all'ordine della curva. Quindi una linea dell'ordine n non potrà essere incontrata da una retta qualunque in più di n punti, ma spesso in meno, se tra le radici dell'equazione in x ve ne saranno alcune immaginarie.

Si debbano in secondo luogo cercare le intersezioni della parabola espressa dall'equazione $y^2-bx=0$, e del circolo che ha per equazione $y^2-2by-bx+x^2+b^2=0$. Per eliminare y si sottragga la seconda equazione dalla prima, ed avrassi $2by-x^2-b^2=0$, cioè $y=\frac{x^2+b^2}{2b}$, onde ricaveremo il valore di y, subito che conosceremo quello di x. Si sostituisca il valore di y nella prima equazione, e si avrà $x^4+2b^2x^2-4b^3x+b^4=0$, la qual'equazione ha una radice $=b$, onde si deduce $y=\frac{b^2+b^2}{2b}=b$; e quindi la parabola ed il circolo dati s'intersecano in un punto corrispondente all'ascissa ed all'ordinata $=b$. Per gli altri punti d'incontro convien cercare le altre radici della equazione in x.

Ma quantunque le radici della equazione in x siano tutte reali, non ne viene però che ad esse corrispondano le intersezioni delle curve; poichè le applicate corrispondenti a queste ascisse possono essere immaginarie, nel qual caso non si dà alcuno incontro nelle curve. Per dare un esempio di queste intersezioni immaginarie supponghiamo che sull'asse AC (Fig. 40) sia descritta una parabola del parametro $2a$, e fuori di essa alla distanza $BC=b-2a$ sul diametro $AB=2a$ un circolo; è chiaro che queste due curve non potranno mai incontrarsi. Ora presa l'origine delle x nel punto A, l'equazione della parabola sarà $y^2=2a(x-b)$, e quella del circolo $y^2=2ax-x^2$, ed eliminando y avremo l'equazione $x^2-2ab=0$, che ha le radici reali $x=\pm\sqrt{2ab}$, e come $b>2a$, parrebbe che un incontro corrispondesse ad un punto dell'asse situato tra B, e C, e l'altro alla sinistra del punto A, ed ambedue fuori del cerchio e della parabola. Ma se ricaviamo dalle due equazioni date il valore di y, troveremo questo essere $\sqrt{2a(\pm\sqrt{2ab}-b)}$, cioè immaginario.

Vi sono adunque delle intersezioni immaginarie, che il calcolo indica, come se fossero reali, perchè il calcolo cerca i valori di y eguali nelle due curve, e corrispondenti alla mede-

sima ascissa, o siano essi reali o immaginarj. Quindi dal numero delle radici reali della equazione in x non si può concludere il numero di altrettante intersezioni, ma convien prima vedere se l'ordinata corrispondente all'ascissa reale sia anch'essa reale, condizione necessaria, perchè si dia l'incontro. Se però in una dell'equazioni delle due curve la y non oltrepasserà la prima dimensione, o se nell'atto di eliminare si giungerà ad una equazione tra x ed y, in cui y non abbia che una dimensione, come è accaduto nel secondo esempio, potremo esser certi che non si danno intersezioni immaginarie, perchè a qualunque valore reale di x corrisponderà sempre un valore reale di y.

99.

Questa teoria dell'intersezione delle curve è stata da *Descartes* il primo applicata alla costruzione dell'equazioni. Poichè, siccome date l'equazioni di due curve tra le coordinate x ed y eliminando y ottenghiamo una equazione in x, le radici della quale determinano i punti d'intersezione delle due curve; viceversa se sarà data una equazione in x, e si troveranno l'equazioni tali di due curve, che dalla eliminazione di y ne nasca la proposta equazione in x, l'intersezioni delle due curve daranno i valori delle radici dell'equazione data. Infatti le perpendicolari tirate da ciascun punto d'incontro sull'asse taglieranno le ascisse eguali ai diversi valori di x. Ma è molto importante nella scelta delle curve di evitar quelle, che ci potrebbero dare intersezioni immaginarie corrispondenti ad ascisse reali; lo che per ciò, che abbiamo detto, otterremo prendendo una delle due curve tali, che nella di lei equazione la y non oltrepassi la prima dimensione, cioè, come si suol dire, che questa curva sia di genere *parabolico*.

Ma per veder chiaramente, quali curve dobbiamo adoprare, cerchiamo prima indirettamente quali sono l'equazioni risultanti dalla eliminazione dell'applicata nell'equazioni di due linee date. Siano date in primo luogo (Fig. 41) due rette BM, CM, le quali s'incontrino nel punto M; si prenda BA per asse, ed il punto A per origine delle ascisse, e sia $AB=a$, $AC=b$, $AP=x$, $PM=y$, e condotta la retta AD perpendicolare all'asse sia $AD=c$, $AE=d$. L'equazione della retta BM si troverà essere $ay=ac+cx$, e quella della retta CM $by=dx+bd$. Adesso

eliminando y avremo $x=\frac{ab(c-d)}{ad-bc}$, alla qual'equazione si riducono tutte quelle del primo grado.

Supponghiamo adesso che sia il circolo (Fig. 42) incontrato dalla retta BM. Prendiamo la retta BA per asse, ed il punto A per origine delle ascisse, e tirando dal punto A e dal centro C del cerchio le perpendicolari all'asse AC, DE facciamo $AB=a$, $AC=b$, $DM=c$, $AE=d$, $DE=e$. Avremo per la retta l'equazione $y=b+\frac{bx}{a}$, e pel cerchio $(x-d)^2+(y-e)^2=c^2$, ed eliminando y otterremo l'equazione

$x^2-2\frac{a^2d+ab(e-b)}{a^2+b^2}x+\frac{a^2d^2+a^2(e-b)^2-a^2c^2}{a^2+b^2}=0$; onde mediante l'intersezione del cerchio e di una retta si potranno costruire tutte l'equazioni del secondo grado. Infatti sia data da costruirsi l'equazione generale $x^2-Ax-B=0$; paragonandola con la precedente avremo $A=2\frac{a^2d+ab(e-b)}{a^2+b^2}$, e $B=\frac{a^2c^2-a^2(e-b)^2-a^2d^2}{a^2+b^2}$.

Dalla prima equazione si ricava $d=\frac{A(a^2+b^2)}{2a^2}-\frac{b(e-b)}{a}$, e sostituito questo valore la seconda diventa

$B(a^2+b^2)=a^2c^2-(e-b)^2(a^2+b^2)-\frac{A^2(a^2+b^2)^2}{4a^2}+\frac{Ab(e-b)(a^2+b^2)}{a}$,

onde si deduce

$c=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}\times\sqrt{\left[(e-b)^2+B+\frac{A^2(a^2+b^2)}{4a^2}-\frac{Ab(e-b)}{a}\right]}$. Rimangono in nostro arbitrio le quantità a, b, e, le quali però devono prendersi in modo, che il secondo radicale riesca reale, altrimenti sarebbe immaginario il raggio del circolo. Per evitare il primo radicale facciamo $b=0$, ed avremo $d=\frac{A}{2}$, e

$c=\frac{\sqrt{(4e^2+A^2+4B)}}{2}$; in questo caso la retta BM caderà sull'asse, la lettera a sparisce dal calcolo, e la lettera e può aver qualunque valore. Per render razionale anche il valore di c facciamo $c=e+\frac{m}{2}$, e troveremo $e=\frac{A^2+4B-m^2}{4m}$, e $c=\frac{A^2+4B+m^2}{4m}$, ove per m possiamo prender qualunque quantità, ed il circolo

cercato si costruirà così. Presa $AE = \frac{A}{2}$ si faccia la perpendicolare $ED = \frac{A^2 + 4B - m^2}{4m}$; sarà D il centro del cerchio, ed il di lui raggio sarà $= \frac{A^2 + 4B + m^2}{4m}$. Avremo una costruzione semplicissima se ponghiamo $m = A$, poichè allora sarà $AE = \frac{A}{2}$, $ED = \frac{B}{A}$, ed il raggio $= \frac{A}{2} + \frac{B}{A}$, cioè $= AE + ED$.

Se cerchiamo l'intersezione di due cerchi, giungeremo ad una equazione di secondo grado; onde mediante due circoli non si può fare che ciò, che più semplicemente si fa con un circolo ed una retta. Se poi consideriamo le intersezioni di due sezioni coniche, o di una di esse col circolo, ne vedremo nascere una equazione del quarto grado, e quindi mediante le sezioni coniche non si possono costruire che l'equazioni, le quali non superano il quarto grado. Una linea del terz'ordine, che è tagliata da una del secondo, ci condurrà ad una equazione del sesto grado. E generalmente dalla intersezione di una linea dell'ordine m con un'altra dell'ordine n ne nascerà una equazione del grado mn (49).

Data pertanto una equazione, che debba costruirsi, convien risolvere l'esponente del di lei grado in due fattori, i quali ci daranno gli esponenti dell'ordine delle due linee che servono alla cercata costruzione, e per evitare le intersezioni immaginarie convien prendere una di queste linee di genere parabolico. Ma come per lo più il grado dell'equazione data si può dividere in due fattori in più maniere, così bisogna scegliere quella, che ci dà curve di un ordine meno elevato, e che più facilmente si costruiscano. Così data una equazione del sesto grado, siccome l'esponente 6 si può risolvere ne' fattori 1, 6, e 2, 3, l'equazione potrà costruirsi con una retta, ed una linea del sest'ordine, o pure con una linea del second'ordine ed una del terzo, e questa ultima maniera dovremo scegliere, perchè ci dà curve meno elevate, avvertendo di più di fare in modo, che la linea del second'ordine sia il circolo, il quale per la facilità della sua costruzione si considera a questo effetto del medesim'ordine, che la linea retta.

Proposta adunque una equazione da costruirsi si prenda una curva conveniente compresa nella equazione $M+Ny=0$, ove M ed N sono funzioni della sola x, e siccome l'altra curva dev'esser tale, che sostituendovi $-\frac{M}{N}$ in luogo di y ne risulti la proposta equazione; viceversa da questa potrà dedursi la seconda curva, se in luogo di $-\frac{M}{N}$ vi si porrà y. Sia data per esempio da costruirsi l'equazione del quarto grado $x^4+Ax^2+Bx+C=0$: prendiamo per una delle due curve la parabola espressa dall'equazione $ay=x^2+bx$, e sostituendo nella proposta $(ay-bx)^2$ in luogo di x^4 avremo l'equazione del second'ordine $a^2y^2-2abxy+(A+b^2)x^2+Bx+C=0$, e le intersezioni di questa curva con la parabola ci daranno le radici della equazione data. A motivo delle due quantità arbitrarie a, e b quella equazione rappresenterà infinite curve, le quali tutte potranno servire alla costruzione cercata. Se all'equazione già trovata aggiungiamo un multiplo ac dell'equazione della parabola, avremo un'altra equazione molto più generale, cioè

$$(A)\ a^2y^2-2abxy+(A+b^2+ac)x^2+(B+abc)x-a^2cy+C=0.$$

Se la quantità $A+ac$ è positiva, la curva contenuta in questa equazione sarà una ellisse, se è $=0$, una parabola, se è negativa, una iperbola; e diventerà un cerchio, se $b=0$, e $c=a-\frac{A}{a}$, poichè l'equazione sarà in questo caso

$$y^2+x^2+\frac{Bx}{a^2}-\left(a-\frac{A}{a}\right)y+\frac{C}{a^2}=0,$$

cioè

$$\left(y-\frac{a}{2}+\frac{A}{2a}\right)^2+\left(x+\frac{B}{2a^2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}-\frac{A}{2a}\right)^2+\frac{B^2}{4a^4}-\frac{C}{a^2},$$

ove il secondo membro è il quadrato del raggio del circolo. Se facciamo $C=0$, avremo la costruzione dell'equazioni del terzo grado. Tutte le curve contenute nella equazione (A) taglieranno la parabola ne' medesimi punti; e quindi anch'esse s'incontreranno ne' medesimi punti. Perciò senza timore d'intersezioni immaginarie potremo costruire l'equazione data per mezzo di due qualunque delle curve comprese nella equazione (A); ma per più semplicità converrà fare in modo, che una di queste curve sia il circolo.

Per costruire con questo metodo l'equazione del terzo grado $x^3+Ax+B=0$, prendiamo l'equazione della parabola $x^2=ay-bx$, e sostituendo questo valore di x^2 nella proposta avremo $axy-bx^2+Ax+B=0$, ed aggiungendovi un multiplo c della equazione della parabola otterremo
$axy+(c-b)x^2+(A+bc)x-acy+B=0$, la qual'equazione appartiene sempre all'iperbola. Onde, se per maggior semplicità vorremo adoprare un cerchio, dovremo ridurre la proposta al quarto grado moltiplicandola per x. Avremo così una intersezione di più, ma questa sarà facile a riconoscersi, perchè caderà sulla origine delle coordinate. Similmente data una equazione qualunque, potremo spesso averne una costruzione più semplice moltiplicandola per x, o per x^2, o per x^3, ec. Così se avremo una equazione del trentesimo nono grado, essa si potrà costruire con una linea del terzo ed una del tredicesimo ordine: ma se si moltiplica per x, si potrà costruire con una linea del quinto ed una dell'ottavo ordine, cioè in un modo più semplice del precedente, e moltiplicandola per x^3 potremo adoprare una linea del sesto ed una del settimo ordine, e questa costruzione si deve reputare ancor più semplice. Ma in generale oltre all'adoprare curve di un ordine il minore possibile, bisogna specialmente aver riguardo nella scelta a quelle, che più comodamente si descrivono.

100.

Passiamo a veder l'uso di questa teoria nella risoluzione di alcuni problemi.

Problema I.

„ Date due rette AO, AG (Fig. 43), che s'incontrano in „ A, trovare un punto M dentro l'angolo OAG in modo, che „ tirate le rette MN, MO, le quali formino con le rette AG, „ AO angoli dati, sia la loro somma eguale ad una retta data „ c, ed inoltre le medesime rette stiano nel dato rapporto di „ $m:n$ „.

Supposto conosciuto il punto M, da esso si tirino le rette MP, MQ parallele ai lati dell'angolo dato, e sia $MP=AQ=y$, $MQ=AP=x$. Siccome son dati gli angoli P ed N del triangolo PMN, sarà data la ragione de' lati PM, MN, che suppon-

go esser quella di $n:a$, e quindi avremo $MN=\frac{ay}{n}$. Similmente se $m:b$ è il rapporto dato dei lati QM, MO del triangolo QMO, avremo $MO=\frac{bx}{m}$. Ora per le condizioni del problema dev' essere $MN:MO=m:n$; quindi avremo l'equazione $ay=bx$. Ma la somma delle due rette MN, MO dev' essere $=c$, perciò avremo ancora l'equazione $\frac{ay}{n}+\frac{bx}{m}=c$. Combinando questa con la precedente ne ricaveremo $x=\frac{mnc}{b(m+n)}$.

Per costruire questo valore di x si prenda nella retta AG prolungata $AB=m$, $BC=n$, e nella retta AO si prenda $AE=n$, e tirata la retta CE dal punto B se gli conduca parallela la retta BF, che incontrerà in F il lato AO, e sarà $AF=\frac{mn}{m+n}$. Sostituito questo valore avremo $x=\frac{c.AF}{b}$: onde se prendiamo la retta $AG=c$, e la retta $AH=b$, ed alla retta GH conduciamo dal punto F la parallela FP, avremo $x=AP$.

Trovato il valore di x, per aver quello di y si osservi, che $a:b=x:y$; onde presa $AI=a$, e congiunti i punti I ed H se ad IH tiriamo dal punto P la parallela PQ, sarà $y=AQ$. Adesso dai punti noti P e Q tirate ai lati dell'angolo dato le parallele PM, QM, queste determineranno col loro incontro il punto cercato M.

Problema II.

„ Trovare un punto M (Fig. 44), dal quale tirate ai tre „ punti dati A, B, C le rette MA, MB, MC, abbiano queste „ tra loro i rapporti delle date rette m, n, p „.

Congiunti i punti A e B, si tirino dai punti C ed M sulla retta AB le perpendicolari CD, MP, e sia $AB=a$, $AD=b$, $CD=c$, $AP=x$, $PM=y$, $AM=z$, e quindi $BM=\frac{n}{m}z$, $CM=\frac{p}{m}z$. Posto ciò è chiaro che avremo $z^2=x^2+y^2$, $\frac{n^2z^2}{m^2}=(a-x)^2+y^2$, $\frac{p^2z^2}{m^2}=(x-b)^2+(c-y)^2$, e da queste ricave-

remo l'equazioni $(m^2-n^2)(y^2+x^2)-2am^2x+a^2m^2=0$, $(m^2-p^2)(x^2+y^2)-2cm^2y-2bm^2x+(b^2+c^2)m^2=0$; onde eliminando y arriveremo ad una equazione in x del secondo grado. Ma possiamo costruire il problema mediante l'equazioni già trovate, le quali appartengono a due circoli, perchè si riducono alla forma

$$\left(x-\frac{am^2}{m^2-n^2}\right)^2+y^2=\frac{a^2m^2n^2}{(m^2-n^2)^2},$$

$$\left(x-\frac{bm^2}{m^2-p^2}\right)^2+\left(y-\frac{cm^2}{m^2-p^2}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)m^2p^2}{(m^2-p^2)^2}.$$

Si prenda $AE=\frac{am^2}{m^2-n^2}$, e fatto centro in E il cerchio descritto col raggio $\frac{n.AE}{m}$ sarà quello della prima equazione. Si faccia $AF=\frac{bm^2}{m^2-p^2}$, FG perpendicolare ad AB, ed $=\frac{cm^2}{m^2-p^2}$; ed il cerchio descritto col centro G, e col raggio $\frac{p.AF.AC}{m.AD}$ sarà quello espresso dalla seconda equazione. I punti M ed M', ove questi circoli s'incontrano, risolvono il problema.

PROBLEMA III.

„ Trovare due medie proporzionali tra le due rette date „ $AB=a$, $AC=b$ (Fig. 45) „.

Chiamando x la prima media proporzionale avremo l'equazione $x^3-a^2b=0$. Per costruirla moltiplichiamola per x, ed avremo $x^4-a^2bx=0$; prendiamo l'equazione della parabola $x^2=ay$, che ci darà la curva AM, e sostituiamo il valore di x^2 nella proposta. Avremo $a^2y^2-a^2bx=0$, ed aggiungendovi l'equazione della parabola moltiplicata per a^2 otterremo $a^2y^2-a^2bx+a^2x^2-a^3y=0$, cioè $\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\left(x-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}$ equazione appartenente al cerchio. Si divida pertanto la retta AC per mezzo in D, e dal punto D inalzandogli una perpendicolare $DE=\frac{1}{2}AB$, col centro E e col raggio EA si descriva un cerchio: esso incontrerà la parabola nel punto M, dal quale tirata una perpendicolare sulla retta AC, questa taglierà la retta $AP=x=$ alla prima delle medie proporzionali, e la seconda media sarà PM.

PROBLEMA IV.

„ Trovare un punto M (Fig. 46) nella periferia di un cer-
„ chio dato, dal quale tirate le rette MA, MB, MC a due
„ punti dati A, e B, ed al centro C del circolo, siano le tan-
„ genti degli angoli AMC, BMC nel dato rapporto $m:n$ „.

Si conducano pel centro C le rette AC, BC, e dal punto M si tirino ad esse parallele e perpendicolari le rette MP, MQ; MR, MS: di più dal punto B si tiri sulla retta AC la perpendicolare BO, e sia $AC=a$, $BC=b$, $CO=c$, ed il raggio CM del dato cerchio $=r$. Si faccia $AC:CM=CM:CF$, $BC:CM=CM:CG$, cioè $CF=\frac{r^2}{a}$, $CG=\frac{r^2}{b}$, e condotte le rette MF, MG sarà l'angolo $AMC=CFM$, e l'angolo $BMC=CGM$. Ora avremo
$\text{tang.}CFM:\text{tang.}MPR=PR:FR$, e
$\text{tang.}CGM:\text{tang.}MQS(=\text{tang.}MPR)=QS:GS$, e quindi
$\text{tang.}CFM:\text{tang.}CGM=PR\times GS:FR\times QS$; onde per le condizioni del problema avremo l'equazione $mFR\times QS=nPR\times GS$. Si osservi che $BC:CO=MP:PR=MQ:QS$, cioè, chiamando CP x ed MP y, $PR=\frac{cy}{b}$, $QS=\frac{cx}{b}$, e perciò $FR=\frac{r^2}{a}+\frac{bx+cy}{b}$, $GS=\frac{r^2}{b}+\frac{by+cx}{b}$. Sostituendo questi valori avremo

$$\frac{cmr^2x}{ab}+\frac{bcmx^2+c^2mxy}{b^2}=\frac{cnr^2y}{b^2}+\frac{bcny^2+c^2nxy}{b^2},$$ cioè

$$abny^2-ac(m-n)xy-abmx^2+anr^2y-bmr^2x=0 \quad (A).$$

Siccome abbiamo due incognite, convien trovare un'altra equazione, e questa ci verrà data dal circolo. Infatti abbiamo $BC:BO=MP:MR=\frac{y\sqrt{(b^2-c^2)}}{b}$, e sostituendo i valori di CR, e di MR nella equazione al circolo $\overline{CR}^2+\overline{MR}^2=r^2$ avremo $b^2x^2+2bcxy+b^2y^2=b^2r^2$. Col mezzo di questa possiamo eliminare y dall'equazione (A), ed avremo una equazione in x del quarto grado, che costrutta ci darà i valori di x. Ma senza eseguire questa eliminazione, basta costruire l'equazione (A), che appartiene all'iperbola, e le intersezioni di essa col circolo ci daranno i punti M richiesti.

A questo problema si riduce l'altro, in cui si cerca un punto M tale (Fig. 47), che, tirate le rette MA, MB a due punti

dati, siano le corde MC, Mc eguali. In questo caso avremo $m=n$, e l'equazione (A) diventerà $y^2-x^2+\frac{r^2}{b}y-\frac{r^2}{a}x=0$. Costrutta l'iperbola MM' di questa equazione, e l'iperbola opposta $M''M'''$, i punti M, M', M'', M''', ov'esse tagliano il circolo, soddisfanno egualmente al problema.

CAPITOLO XIV.

Delle curve trascendenti.

101.

Finora abbiamo parlato delle curve algebraiche, passiamo adesso a dir qualche cosa delle trascendenti. Ogni curva sarà trascendente, quando nella di lei equazione l'applicata y sarà una funzione trascendente dell'ascissa. Abbiamo considerate alcune funzioni trascendenti, cioè i logaritmi, le quantità esponenziali, e quelle che dipendono dal circolo; onde se nella equazione di una curva si troveranno in qualunque modo alcune di queste funzioni, essa non sarà algebraica, ma trascendente. Oltre le funzioni logaritmiche e circolari, che possono riguardarsi come le più semplici trascendenti, ve ne sono infinite altre, l'origine delle quali si ritrova nell'Analisi degl'Infiniti. Quindi noi non potremo che dir poche cose sulle curve trascendenti, fin dove arrivano cioè le nostre cognizioni sulle funzioni trascendenti.

Alcune volte la curva non è algebraica, quantunque nella di lei equazione non vi sia apparentemente alcuna funzione trascendente. Tale sarebbe l'equazione $y=x^{\sqrt{2}}$, dalla quale non si può in alcun modo con operazioni algebraiche togliere l'irrazionalità; onde non può riporsi tra le curve algebraiche. Ma per mezzo di operazioni trascendenti, cioè de' logaritmi, si potrà risolvere questa equazione, poichè sarà $\log.y=\sqrt{2}\log.x$, e quindi ad ogni valore di x troveremo il valore corrispondente di $\log.y$, e tornando dai logaritmi ai numeri anche quello di y.

Così pure dovremo riporre tra le curve trascendenti quelle, nell'equazioni delle quali gli esponenti delle variabili saran-

no immaginarj. Per esempio l'equazione $y=x^{\sqrt{-1}}+x^{-\sqrt{-1}}$ appartiene ad una curva trascendente; lo che apparirà più chiaramente, se osserveremo che $e^{v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}=2\cos.v$; onde facendo $e^v=x$, ed $v=\log.x$, avremo $y=2\cos.\log.x$, e la curva sarà doppiamente trascendente, perchè dipenderà e da' logaritmi, e dalle funzioni circolari. Ma siccome queste curve apparentemente non trascendenti si riducono ai logaritmi ed alle quantità circolari, esaminiamo le curve che da queste funzioni trascendenti immediatamente dipendono.

Sia data in primo luogo la curva espressa dalla equazione $\log.\frac{y}{a}=\frac{x}{b}$, alla quale si dà il nome di *Logaritmica*. Passando dai logaritmi ai numeri avremo $y=ae^{\frac{x}{b}}$, dalla qual'equazione apparisce, che le ascisse x crescendo in progressione aritmetica, le applicate y crescono in progressione geometrica. Prendiamo (Fig. 48) la retta AP per asse, ed il punto A per origine delle ascisse, e primieramente sarà nel punto A l'applicata $AB=a$, poi alla destra del punto A le applicate anderanno sempre crescendo, e sempre diminuiranno alla sinistra del punto A in modo, che l'asse Ap sarà asintoto della curva.

Si può facilmente tirar la tangente a questa curva; infatti essendo l'ordinata $PM=ae^{\frac{x}{b}}$, se si conduce un'altra applicata $P'M'$ distante dalla prima della retta $PP'=u$, sarà $P'M'=ae^{\frac{x+u}{b}}$, ed $M'Q=ae^{\frac{x+u}{b}}-ae^{\frac{x}{b}}=ae^{\frac{x}{b}}(e^{\frac{u}{b}}-1)$. Se per i punti M ed M' facciamo passare una retta, che incontri l'asse in T, avremo $PT:PM=MQ:QM'$, e quindi $PT=\frac{u}{e^{\frac{u}{b}}-1}=\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{u}{2b^2}+\frac{u^2}{6b^3}+\text{ec.}}$. Ma se il punto P' cade sul punto P, cioè se $u=0$, la retta MT incontrerà la curva nel solo punto M, e ne sarà tangente: dunque la *sottangente* PT sarà $=\frac{1}{\frac{1}{b}}=b$, cioè costante, e questa è la proprietà principale della logaritmica.

Se l'equazione di una curva conterrà quantità esponenziali, converrà ricorrere ai logaritmi per costruirla. Così data l'equazione $y=x^x$, avremo prendendo i logaritmi $\log.y=x\log.x$; onde da ciascun valore di x ricaveremo il valore di $\log.y$, e poi quello di y. Alcune volte non è così facile il costruire la curva; come se fosse data l'equazione $x^y=y^x$, poichè prendendo i logaritmi non guadagneremmo niente. In primo luogo è chiaro, che possiamo soddisfare a questa equazione prendendo $y=x$, lo che indica una retta inclinata all'asse ad angolo semiretto; ma ciò non esaurisce l'equazione, poichè essa sussiste anche preso $y=2$, ed $x=4$, o viceversa $y=4$, ed $x=2$. Per trovare le altre parti, che oltre la retta son comprese nella equazione facciamo $y=ux$, ed avremo $x^{ux}=u^x x^x$, cioè $x^{u-1}=u$, e quindi $x=u^{\frac{1}{u-1}}$, ed $y=u^{\frac{u}{u-1}}$. Dando pertanto diversi valori ad u ne ricaveremo il valore di x ed il corrispondente di y.

Venghiamo alle curve, che dipendono dal cerchio, ed in primo luogo esaminiamo la linea dei seni, la di cui equazione è $y=a\text{Arc.sen.}\frac{x}{c}$, cioè l'applicata è proporzionale all'arco di cerchio, che ha $\frac{x}{c}$ per seno. Siccome ad un medesimo seno corrispondono infiniti archi, così ad ogni valore dell'ascissa x corrisponderanno infiniti valori dell'applicata, e se u è il più piccolo arco che abbia $\frac{x}{c}$ per seno, e p rappresenta la semiperiferia del circolo, i valori di y saranno i seguenti:

$$au,\ a(p-u),\ a(2p+u),\ a(3p-u),\ a(4p+u),\ \text{ec.}$$
$$-a(p+u),\ -a(2p-u),\ -a(3p+u),\ -a(4p-u),\ \text{ec.}$$

Presa adunque (Fig. 49) la retta BAC per asse, ed il punto A per origine delle ascisse, al punto A corrisponderanno le applicate $AA'=ap$, $AA''=2ap$, $AA'''=3ap$, ec. $Aa=ap$, $Aa'=2ap$, ec. E se si prende un punto qualunque P in modo, che sia $\frac{AP}{c}$ il seno dell'arco u, sarà $PM=au$, $PM'=a(p-u)=AA'-PM$, $PM''=a(2p+u)=AA''+PM$, ec., $Pm=a(p+u)=Aa+PM$, $Pm'=a(2p-u)=Aa'-PM$, ec. Onde apparisce, che la curva sa-

rà tutta composta di porzioni simili ed eguali AEA', $A'E'A''$, ec., Aea, $ae'a'$, ec. I punti E, E', E'', ec., e, e', e'', ec. corrisponderanno alle ascisse $AC=AB=c$, e sarà $CE=Be=\frac{ap}{2}$, $CE''=Be''=\frac{5ap}{2}$, ec., $Ce'=BE'=\frac{3ap}{2}$, ec., in modo che le distanze EE'', Ee', $E'e$, ee'', ec. saranno tutte $=2ap$.

Una figura simile si troverà per la linea de' coseni, che ha per equazione $y=\text{Arc.cos.}x$, ma affatto diversa e composta d'infiniti rami sarà la linea delle tangenti espressa dall'equazione $y=\text{Arc.tang.}x$. Ma siccome si può facilmente dalle proprietà delle tangenti dedurre la figura di questa curva, e di quella delle secanti, che ha per equazione $y=\text{Arc.sec.}x$, passiamo a considerare una curva più celebre, alla quale è stato dato il nome di *cicloide*.

Scorra per la retta EA (Fig. 50) ruotandosi un cerchio; il punto D del suo diametro descriverà una curva DD'. Sia in principio il diametro AB perpendicolare alla retta EA, il raggio del cerchio $=a$, e la retta $CD=b$; poi muovendosi il cerchio sia giunto nella situazione $A'RB'$, e sia adesso $A'C'D'$ la posizione della retta ACD, e D' in conseguenza un punto della curva. Posta la retta $AQ=az$, sarà l'arco $A'Q=az$, e l'arco $QB'=a(p-z)$, e z, $p-z$ gli archi corrispondenti nel cerchio, che ha il raggio $=1$. Quindi tirando $D'P$ perpendicolare in P e P' ai diametri AB e QR avremo $D'P'=b\text{sen.}z$, $C'P'=-b\cos.z$, e chiamando DPx, e $PD'y$ otterremo $x=b-b\cos.z$, $y=az+b\text{sen.}z$, ed eliminando z, $y=\sqrt{(2bx-x^2)}+a\text{Arc.sen.}\frac{\sqrt{(2bx-x^2)}}{b}$.

Se prendiamo l'origine delle ascisse nel centro C facendo $CP=b-x=t$, l'equazione della cicloide sarà

$y=\sqrt{(b^2-t^2)}+a\text{Arc.cos.}\frac{t}{b}$. Se $b=a$, avremo la cicloide *ordinaria*, la cicloide *allungata* se $b<a$, e la cicloide *accorciata* se $b>a$.

Il cerchio ACB (Fig. 51) invece di ruotarsi sopra una retta, si ravvolga adesso sopra un'altro cerchio OAQ; il punto D preso dentro o fuori del cerchio mobile descriverà un'altra curva, che si chiama *Epicicloide*. Sia il raggio OA del cerchio immobile $=c$, il raggio CB del cerchio mobile $=a$, e la retta

$CD=b$, e prendiamo per asse della curva la retta $OACBD$, ove cadono i punti O, C, D in una data situazione del cerchio mobile. Adesso movendosi questo cerchio giunga nella situazione $A'RB'Q$, $A'D'$ sia la posizione della retta AD, ed il punto D cada in D' in modo, che sia $C'D'=b$. Tirate $D'P$, $C'M$ perpendicolari all'asse, e $C'N$ perpendicolare a $D'P$; sia z l'arco AQ descritto sul cerchio immobile, sarà ancora $A'Q=z$, e l' angolo $AOQ=\frac{z}{c}$, e quindi $C'M=(a+c)\text{sen.}\frac{z}{c}$. L'angolo $RC'D'=$ all'angolo $A'C'Q=\frac{z}{a}$, e l'angolo $NC'R=$ all'angolo $AOQ=\frac{z}{c}$, e perciò l'angolo $NC'D'=\frac{a+c}{ac}z$, e quindi $D'N=b\text{sen.}\frac{a+c}{ac}z$, $C'N=b\cos.\frac{a+c}{ac}z$. Onde, se chiamiamo OP x, e PD' y avremo $x=(a+c)\cos.\frac{z}{c}+b\cos.\frac{a+c}{ac}z$, ed $y=(a+c)\text{sen.}\frac{z}{c}+b\text{sen.}\frac{a+c}{ac}z$.

Se $\frac{c}{a}$ sarà un numero razionale, eliminando z giungeremo ad una equazione algebraica tra x ed y. Sia per esempio $c=a$, ed avremo $x=2a\cos.\frac{z}{a}+b\cos.\frac{2z}{a}$, $y=2a\text{sen.}\frac{z}{a}+b\text{sen.}\frac{2z}{a}$ e prendendo i quadrati di x e di y otterremo

$x^2+y^2=4a^2+b^2+4ab\cos.\frac{z}{a}$. Da questa equazione ricaviamo

$\cos.\frac{z}{a}=\frac{x^2+y^2-4a^2-b^2}{4ab}$, e $\cos.\frac{2z}{a}=2\overline{\cos.\frac{z}{a}}^2-1$

$=\frac{(x^2+y^2)^2-2(4a^2+b^2)(x^2+y^2)+16a^4+b^4}{8a^2b^2}$, e sostituendo questi valori abbiamo $8a^2bx=(x^2+y^2-2a^2-b^2)^2-4a^2(a^2+2b^2)$, la qual'equazione appartiene ad una linea algebraica del quart' ordine. Negli altri casi, ne'quali c non è commensurabile con a, l'epicicloide sarà trascendente. Se prendiamo a negativa, il cerchio mobile caderà dentro l'immobile, e la curva che ne nasce, si chiamerà *Ipocicloide*. Prendendo c infinita avremo il caso trattato della cicloide.

Passiamo in ultimo alle linee *spirali*, così dette, perchè per lo più si ravvolgono con infiniti giri intorno ad un punto fisso C (Fig. 53), come centro. Queste curve si esprimono co-

modamente per mezzo di una equazione tra la distanza CM di un loro punto M dal centro C, e l'angolo ACM, che la retta CM forma con una retta AC data di posizione. Fatto l'angolo $ACM=u$, e la retta $CM=z$, se prendiamo l'equazione semplicissima $z=au$, essa apparterrà alla spirale *Archimedea*, così detta dal suo inventore *Archimede*. L'angolo u che determina la posizione della retta CM può esprimersi in infinite maniere, le quali sono u, $2p+u$, $4p+u$, $6p+u$, ec., $-2p+u$, $-4p+u$, ec. ed a queste corrispondono infiniti valori di z, cioè au, $a(2p+u)$, $a(4p+u)$, ec., $-a(2p-u)$, $-a(4p-u)$, ec. La posizione della retta CM si mantiene la medesima anche per gli angoli $p+u$, $3p+u$, $5p+u$, ec., $-p+u$, $-3p+u$, ec.; ma i valori di CM sono allora negativi: onde ai precedenti valori di z conviene aggiungere anche questi, $-a(p+u)$, $-a(3p+u)$, ec., $a(p-u)$, $a(3p-u)$, ec. Quindi posto l'angolo $u=0$ apparisce che sarà (Fig. 52) $CA=AA'=A'A''=$ ec. $=Ca=aa'=$ ec. $=ap$. Se facciamo $u=\frac{p}{2}$, vedremo che sulla retta CB perpendicolare ad AC cadono i punti doppj C, B, B', ec., b, b', ec., cioè vi s'intersecano due rami di curva, che nel punto C la curva tocca la retta AC, ed i due rami della spirale si ravvolgono intorno al punto C in modo, che $CB=\frac{1}{2}ap$, e $BB'=$ec.$=Bb=bb'=$ec.$=2ap$. Posto l'angolo $aCN=u$, e quindi l'angolo $ACN=p-u$, vedremo che i valori di CN, CN', ec. Cn, Cn', ec. corrispondono esattamente a quelli di CM, CM', ec. Cm, Cm', ec., e quindi la porzione di curva situata alla destra della retta CB è simile ed uguale a quella, che è posta dalla parte sinistra della medesima retta.

Le altre spirali prendono il loro nome dalla somiglianza della loro equazione con quella di altre curve nominate. Così la spirale espressa dall'equazione $z=\frac{a}{u}$ è stata da *Giovanni Bernoulli* chiamata la spirale *iperbolica*, perchè la di lei equazione è simile a quella dell'iperbola tra gli asintoti. La curva che ha per equazione $u=b\log.\frac{z}{a}$ si chiama la spirale *logaritmica*. La retta CM (Fig. 53) tirata dal centro alla curva la incontra sempre sotto il medesimo angolo. Condotta un'altra retta CM', e

col centro C e col raggio CM descritto l'arco di cerchio ML sia $M'L=t$; avremo

$$u+\text{ang.}MCM'=u+\frac{ML}{z}=b\log.\frac{z+t}{a}=b\log.\frac{z}{a}+b\log.\left(1+\frac{t}{z}\right)$$ e

quindi $\frac{ML}{z}=b\left(\frac{t}{z}-\frac{t^2}{2z^2}+\frac{t^3}{3z^3}-\text{ec.}\right)$, ed

$\frac{ML}{M'L}=b\left(1-\frac{t}{2z}+\frac{t^2}{3z^2}-\text{ec.}\right)$. Quanto sarà minore la retta $M'L$, tanto più il rapporto $\frac{ML}{M'L}$ anderà accostandosi al valore della tangente dell'angolo $MM'L$, e non lo esprimerà esattamente, che quando sarà $M'L=0$. Facendo adunque $t=0$ avremo la tangente dell'angolo $MM'L=b$, e perciò quell'angolo costante. Acciò divenga $z=0$ convien che sia $u=-\infty$; quindi la spirale logaritmica dalla parte superiore AM và estendendosi all'infinito, ma dalla parte inferiore và sempre accostandosi al punto C, al quale però non giunge, che dopo infinite rivoluzioni, cioè non vi giunge mai.

CAPITOLO XV.

Delle superficie curve, e delle curve di doppia curvatura.

102.

Come nelle linee curve dal valore di una retta perpendicolare ad un'altra retta data di posizione si comprende, quanto da questa retta la curva si allontani; così per conoscere la situazione dei diversi punti di una superficie curva converrà sapere il valore della distanza di ciascun punto da un piano dato di posizione, dal qual valore si vedrà quanto la superficie dal dato piano si discosti. Sia questo piano quello della Tavola (Fig. 54) e da ciascun punto M della superficie si tiri al piano una perpendicolare MQ; questa ci darà la distanza del punto M dal piano. Ma ciò non basta per determinare la situazione del punto M; convien di più sapere a qual punto del piano corrisponde il punto Q. Per determinar ciò si prenda nel piano a piacere una retta AP, e dal punto Q se gli tiri una perpendicolare QP.

Ora se, preso un punto fisso A della retta AP, conosceremo il valore delle rette QM, PQ, AP, sapremo il luogo del punto M. Quindi è chiaro che a rappresentare una superficie sono necessarie tre coordinate $AP(x)$, $PQ(y)$, $QM(z)$. L'equazione di una superficie dovrà essere adunque $0=$ ad una funzione delle tre variabili x, y, z, dalla quale il valor di z sia dato per x ed y. Onde prese AP e PQ ad arbitrio, se inalzeremo al piano nel punto Q una perpendicolare QM eguale al valore di z datoci dall'equazione per le rette AP e PQ, il punto M sarà nella superficie. Il piano BAC, in cui son situate le coordinate $AP=x$, e $PQ=y$, lo chiameremo in seguito per più brevità il piano delle x ed y; il piano SAC alzato perpendicolarmente al primo sulla retta AC sarà il piano delle x e z; ed il piano SAB perpendicolare al primo, ma alzato sull'asse AB delle y, si dirà il piano delle y e z, perchè su questo piano caderebbero le y e le z, se ad esso si riferisse la superficie.

103.

Vediamo come in questo modo si trovi l'equazione di alcune superficie più note, ed in primo luogo consideriamo un piano (Fig. 55), l'intersezione del quale col piano delle x e delle y (che sarà sempre per noi il piano della Tavola) sia la retta BE, la quale formi con l'asse delle x l'angolo $ABE=\alpha$, e sia $AB=a$. Da un punto qualunque M preso in questo piano si tiri sulla retta BE la perpendicolare ME; congiunta QE sarà anch'essa perpendicolare a BE, e l'angolo MEQ misurerà l'inclinazione del dato piano con quello delle x ed y, la quale chiameremo β. Dal punto Q si tiri QC parallela a BE, e dal punto C si conduca CF parallela a QE: sarà $QP=PC\text{tang.}\alpha$, cioè
$y=(a-x-BC)\text{tang.}\alpha$, $BC=\dfrac{QE}{\text{sen.}\alpha}$, $QE=\dfrac{MQ}{\text{tang.}\beta}=\dfrac{z}{\text{tang.}\beta}$, e quindi $y=\left(a-x-\dfrac{z}{\text{sen.}\alpha\times\text{tang.}\beta}\right)\text{tang.}\alpha$, cioè
$z=(a-x)\text{sen.}\alpha\times\text{tang.}\beta-y\cos.\alpha\,\text{tang.}\beta$; e facendo
$a\,\text{sen.}\alpha\times\text{tang.}\beta=b$, $-\dfrac{b}{a}=c$, $\dfrac{c}{\text{tang.}\alpha}=e$, avremo $z=b+cx+ey$.
Ogni equazione adunque, nella quale le variabili non superano la prima dimensione, apparterrà sempre ad un piano.

Sia A il centro di una sfera (Fig. 54), la distanza AM di

un punto qualunque M della di lei superficie al centro è eguale al raggio a della sfera: ma $AM = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$; dunque l'equazione della superficie sferica sarà $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Sia A il centro della base di un cilindro retto posata sul piano della Tavola; è evidente che le perpendicolari MQ tirate da tutti i punti della superficie caderanno sulla circonferenza della base. Quindi, chiamato a il raggio della base, l'equazione della superficie cilindrica sarà $x^2+y^2=a^2$.

Situata la base di un cono retto sulla Tavola, ed il centro di essa in A, se da un punto qualunque M della superficie si tira sulla base la perpendicolare MQ, sarà $AQ=\sqrt{(x^2+y^2)}$ il raggio del cerchio parallelo alla base, e corrispondente al punto M. Ma questo raggio stà a quello della base che chiameremo a, come l'asse del cono, che diremo b, meno la distanza QM all'asse medesimo. Quindi l'equazione della superficie conica sarà $a^2(b-z)^2=b^2(x^2+y^2)$, e prese le coordinate dal vertice del cono, ed il piano delle x ed y parallelo alla base, l'equazione sarà $a^2z^2=b^2(x^2+y^2)$. Di qui abbastanza apparisce, come dalle date proprietà di una superficie si possa ricavare la di lei equazione.

104.

Data l'equazione di una superficie (Fig. 56) tra le coordinate $AP(x)$, $PQ(y)$, $QM(z)$, se in luogo delle coordinate AP, PQ vorremo prendere le $CP'(x')$, $P'Q(y')$ situate nel medesimo piano, facendo $CA=c$, e l'angolo $PCP'=\alpha$ avremo
$x=c-x'\cos.\alpha-y'\text{sen}.\alpha$, $y=y'\cos.\alpha-x'\text{sen}.\alpha$. Se adesso vogliamo passare dalle coordinate CP', $P'Q$, QM alle coordinate CP', $P'Q'$, $Q'M$, ove $P'Q'$ è presa in un nuovo piano $CP'Q'$, l'inclinazione del quale sul piano della Tavola, cioè l'angolo $Q'P'Q$ è $=\beta$, e ponghiamo $CP'=t$, $P'Q'=u$, $Q'M=r$; condotta $Q'R$ perpendicolare a $P'Q$, e $Q'S$ perpendicolare a QM, avremo
$P'R=u\cos\beta$, $Q'R=u\text{sen}.\beta$, $SM=r\cos.\beta$, $Q'S=r\text{sen}.\beta$; onde $x'=t$, $y'=u\cos.\beta-r\text{sen}.\beta$, $z=u\text{sen}.\beta+r\cos.\beta$. Sostituendo i valori di x' e di y' in quei di x e di y avremo

$$x=c-t\cos.\alpha-u\text{sen}.\alpha\times\cos.\beta+r\text{sen}.\alpha\times\text{sen}.\beta,$$
$$y=u\cos.\alpha\times\cos.\beta-r\cos.\alpha\times\text{sen}.\beta-t\text{sen}.\alpha,$$
$$z=u\text{sen}.\beta+r\cos.\beta.$$

Posti questi valori nella equazione della superficie avremo l'equazione della medesima tra le coordinate CP', $P'Q'$, $Q'M$.

Adesso nel nuovo piano potremo variare la posizione delle coordinate CP', $P'Q'$, ed otterremo l'equazione generale della superficie riferita a qualunque piano. Ma qualsivoglia permutazione di coordinate si faccia, nella equazione della superficie si manterrà sempre il medesimo numero di dimensioni, che si trovava in principio nell'equazione tra x, y, e z. Questa costanza di dimensioni ci somministra il modo di dividere le superficie in ordini, l'ordine essendo eguale alla massima dimensione, che nell'equazione della superficie formano le variabili.

Alcune volte torna conto di rappresentare le superficie per la relazione, che passa tra la retta AM (Fig. 54) che da un punto qualunque M và ad un punto fisso A, tra l'angolo MAQ che la retta AM forma con un piano fisso APQ, e tra l'angolo QAP che nel medesimo piano forma la retta AQ con una retta AP data di posizione. Se si pone la retta $AM=r$, l'angolo $PAQ=p$, e l'angolo $QAM=q$, data l'equazione tra le coordinate AP, PQ, QM, se ne ricaverà facilmente l'equazione tra le variabili r, p, q. Infatti $MQ=z=r\text{sen}.q$, $AQ=r\cos.q$, $AP=x=AQ\cos.p=r\cos.p\times\cos.q$, $PQ=y$ $=AQ\text{sen}.p=r\text{sen}.p\times\cos.q$. Viceversa data l'equazione tra r, p, e q, se ne dedurrà quella tra x, y, e z, se si porrà

$$r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)},\ \text{sen}.q=\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}},\ \text{e sen}.p=\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

105.

Se nei valori precedenti di x, y, e z espressi per t, u, ed r facciamo $r=0$, avremo

$$x=c-t\cos.\alpha-u\text{sen}.\alpha\times\cos.\beta,$$
$$y=u\cos.\alpha\times\cos.\beta-t\text{sen}.\alpha,$$
$$z=u\text{sen}.\beta,$$

i quali valori sostituiti nella equazione della superficie ci daranno una equazione tra t ed u. Ma se facciamo (Fig. 56) $MQ'=r=0$ abbiamo i punti della superficie, che sono situati nel piano $CP'Q'$: dunque quella equazione tra t ed u apparterrà a tutti i punti della superficie che sono nel piano $CP'Q'$, cioè alla sezione che nella superficie forma il piano $CP'Q'$. Abbiamo così la maniera di trovare quali curve siano formate nelle superficie dai piani, che in qualunque modo le taglino, lo che giova assai per la cognizione delle superficie curve.

Nella superficie sferica abbiamo $x^2+y^2+z^2=a^2$; dunque l'equazione della sezione sarà

$$t^2+u^2-2ct\cos.\alpha-2cu\,\text{sen}.\alpha\times\cos.\beta+c^2=a^2,$$

la quale appartiene al cerchio, come vedremo facendo $t=p+c\cos.\alpha$, $u=q+c\,\text{sen}.\alpha\times\overline{\cos.\beta}$, perchè allora quella equazione diventa $p^2+q^2=a^2-c^2\,\overline{\text{sen}.\alpha}^2\times\overline{\text{sen}.\beta}^2$. Il raggio di questo cerchio sarà $\sqrt{(a^2-c^2\,\overline{\text{sen}.\alpha}^2\times\overline{\text{sen}.\beta}^2)}$, ed il di lui centro si troverà ove $t=c\cos.\alpha$, ed $u=c\,\text{sen}.\alpha\times\cos.\beta$. Se sarà $a<c\,\text{sen}.\alpha\times\text{sen}.\beta$, il raggio diventerà immaginario, ed il piano non incontrerà la sfera. Se $a=c\,\text{sen}.\alpha\times\text{sen}.\beta$, il raggio sarà zero, ed il piano incontrerà la superficie in un sol punto, cioè sarà tangente di essa.

La superficie cilindrica ha per equazione $x^2+y^2=a^2$; quindi l'equazione della sezione sarà

$$t^2+u^2\,\overline{\cos.\beta}^2-2ct\cos.\alpha-2cu\,\text{sen}.\alpha\times\cos.\beta+c^2=a^2,$$

la quale posto $t=p+c\cos.\alpha$, $u=q+c\dfrac{\text{sen}.\alpha}{\cos.\beta}$ diventa

$p^2+q^2\,\overline{\cos.\beta}^2=a^2$, equazione dell'ellisse. Se $\beta=0$, cioè se il piano secante è parallelo alla base, questa ellisse diventa un cerchio dell'equazione $p^2+q^2=a^2$, cioè un cerchio eguale alla base. Se $\cos.\beta=0$, cioè se il piano è perpendicolare alla base, abbiamo l'equazione $t^2-2ct\cos.\alpha=a^2-c^2$, cioè $t=c\cos.\alpha\pm\sqrt{(a^2-c^2\,\overline{\text{sen}.\alpha}^2)}$; la quale ci dà due rette perpendicolari alla base se $a>c\,\text{sen}.\alpha$, una sola retta se $a=c\,\text{sen}.\alpha$, e ci mostra che il piano non incontra la superficie se $a<c\,\text{sen}.\alpha$, cioè se il raggio della base è minore della distanza del piano dal centro della base.

L'equazione $a^2(b-z)^2=b^2(x^2+y^2)$ della superficie del cono retto ci darà per l'equazione della sezione

$$t^2+u^2\left(\overline{\cos.\beta}^2-\frac{a^2}{b^2}\overline{\text{sen}.\beta}^2\right)-2ct\cos.\alpha-2u\left(c\,\text{sen}.\alpha\times\cos.\beta-\frac{a^2\,\text{sen}.\beta}{b}\right)$$
$$+c^2-a^2=0.$$

Questa equazione appartiene alla parabola se $\text{tang}.\beta=\dfrac{b}{a}$, cioè se l'angolo d'inclinazione del piano secante è eguale all'angolo che forma un lato del cono con la base; all'iperbola se $\text{tang}.\beta>\dfrac{b}{a}$, ed all'ellisse se $\text{tang}.\beta<\dfrac{b}{a}$. Questa ellisse diventà un cerchio se $\text{tang}.\beta=0$, cioè se il piano secante è parallelo al-

la base. Inoltre quella equazione si risolve in due fattori razionali, quando tang.$\beta = \frac{b}{c\,\text{sen}.\alpha}$, cioè quando il piano secante passa pel vertice del cono. Questi due fattori sono

$$t + \sqrt{(a^2 - c^2\,\overline{\text{sen}.\alpha^2})}\left(\frac{u}{\sqrt{(b^2 + c^2\,\overline{\text{sen}.\alpha^2})}} - 1\right) - c\cos.\alpha = 0,$$

$$t - \sqrt{(a^2 - c^2\,\overline{\text{sen}.\alpha^2})}\left(\frac{u}{\sqrt{(b^2 + c^2\,\overline{\text{sen}.\alpha^2})}} - 1\right) - c\cos.\alpha = 0,$$

e ci danno due rette, le quali s'intersecano nel vertice del cono quando $a > c\,\text{sen}.\alpha$, ed una sola retta quando $a = c\,\text{sen}.\alpha$. Ma allorchè $a < c\,\text{sen}.\alpha$, quell'equazioni non possono sussistere che nel caso di $t = c\cos.\alpha$, ed $u = \sqrt{(b^2 + c^2\,\overline{\text{sen}.\alpha^2})}$, e ci danno un punto solo, che è il vertice del cono. Combina tutto questo con ciò che altronde sappiamo delle sezioni coniche.

106.

Supponghiamo adesso che una superficie curva sia tagliata da un'altra superficie curva, la sezione non sarà più situata in un piano, e si chiamerà perciò una linea *di doppia curvatura*: e per esprimere la natura di questa curva non basteranno due sole coordinate, come quando la curva è tutta in un piano, ma saranno necessarie tre coordinate. Una equazione tra tre coordinate non appartiene alla sola curva di doppia curvatura, ma a tutti i punti della superficie, in cui essa è riposta. Nella superficie la $PQ = y$ (Fig. 57) può esser qualunque; nella curva di doppia curvatura la PQ dev'esser tale, che corrisponda alle perpendicolari $z = MQ$ tirate dai soli punti della curva, non alle altre tirate dagli altri punti della superficie. Quindi non solo la z dev'essere una funzione di x ed y; ma anche la y dev'essere una funzione di x. Perciò per la curva di doppia curvatura devono esser date due equazioni tra x, y, z, che saranno quelle delle due superficie che si tagliano. Infatti siccome i punti della curva sono comuni ad ambe le superficie; così per questi punti devono aver luogo insieme l'equazioni delle due superficie. Se dalle due equazioni tra x, y, z elimineremo la z avremo una equazione tra x ed y, la quale ci darà il rapporto tra AP e PQ. Questa equazione rappresenterà una curva QR nel piano delle x ed y, da ciascun punto Q della quale tirata al

piano una perpendicolare QM eguale al corrispondente valore di z, il punto M sarà nella curva di doppia curvatura.

La curva QR, che è la traccia di tutte le perpendicolari tirate sul piano PAP' dai punti della linea di doppia curvatura, si chiama la *projezione* di questa linea nel piano delle x ed y. Se eliminassimo x invece di z, avremmo una equazione tra y e z, che esprimerà la projezione $Q'R'$ fatta nel piano $P'AS$ delle y e z. Così pure eliminando y avremo l'equazione della projezione nel piano PAS delle x e z. Due projezioni QR, $Q'R'$ conosciute bastano per determinare la linea di doppia curvatura; poichè presa $AP=x$, PQ ci darà il valore di y, e prese $AP'=PQ$, $P'Q'$ ci darà il valore di z: o sia prese PQ ed AP' eguali, e dai punti Q e Q' inalzate ai respettivi piani le perpendicolari QM, $Q'M$, esse s'incontreranno nel punto M della linea di doppia curvatura.

Date adunque due superficie espresse con le medesime coordinate x, y, e z, le quali si taglino, per determinare la sezione si elimini la z dalle due equazioni, e si avrà l'equazione della projezione QR della cercata sezione. Se questa equazione fosse impossibile, com'è la seguente $x^2+y^2+a^2=0$, ciò sarebbe un segno che le due superficie mai non s'incontrano. Se la projezione si riducesse ad un punto, ciò indicherebbe che le superficie si toccano nel punto corrispondente.

Quando due superficie curve si tagliano, la loro sezione è per lo più una linea di doppia curvatura; può darsi però qualche volta, che questa sezione sia una linea di semplice curvatura, cioè che sia tutta situata in un piano. Per giudicar di ciò si elimini la z da una dell'equazioni delle due superficie, e dall'equazione $mz+nx+py+q=0$ di qualunque piano, o sia si sostituisca in quella equazione $-\frac{nx+py+q}{m}$ in luogo di z, e si osservi se determinate in qualche modo le quantità m, n, p, e q l'equazione trovata tra x ed y sia l'equazione medesima della projezione QR. Se ciò succede, la sezione sarà tutta situata nel piano assunto: altrimenti la sezione sarà una linea di doppia curvatura.

Si cerchino le intersezioni di due superficie sferiche espresse dall'equazioni $x^2+y^2+z^2=a^2$, $(b+x)^2+(c+y)^2+(e+z)^2=f^2$. Eliminando z avremo l'equazione

$4(e^2+b^2)x^2+4(e^2+c^2)y^2+8bcxy-4br^2x-4cr^2y+r^4-4a^2e^2=0$, ove $r^2=f^2-a^2-b^2-c^2+e^2$. Se adesso nella equazione $x^2+y^2+z^2=a^2$ sostituiamo il valore di $z=-\frac{nx+py+q}{m}$ avremo $(m^2+n^2)x^2+(m^2+p^2)y^2+2npxy+2nqx+2pqy+q^2-a^2m^2=0$. Questa equazione si rende affatto simile alla precedente, se si prende $m=2e$, $n=2b$, $p=2c$, $q=-r^2$: dunque la comun sezione delle due superficie sferiche cade in un piano, che ha per equazione $2ez+2bx+2cy-r^2=0$.

Sian date l'equazioni $a^2(b-z)^2=h^2(x^2+y^2)$ della superficie del cono retto, e $(c+x)^2+(d+y)^2=e^2$ per la superficie del cilindro retto: la seconda equazione sarà la medesima che la projezione nel piano delle x ed y. Ora se sostituiamo il valore di $z=-\frac{nx+py+q}{m}$ nell'equazione della superficie conica, avremo

$$(a^2n^2-b^2m^2)x^2+(a^2p^2-b^2m^2)y^2+2a^2npxy$$
$$+2a^2n(q+bm)x+2a^2p(q+bm)y+a^2(q+bm)^2=0.$$

Ma qualunque valore si dia ad m, n, p, e q, questa equazione non diventa mai quella della projezione; perciò la sezione delle date superficie cilindrica e conica non è situata in un piano, ma è una linea di doppia curvatura.

FINE DEL TOMO PRIMO.

INDICE

DE' CAPITOLI CONTENUTI NEL TOMO PRIMO

PARTE PRIMA

DELL' ALGEBRA DELLE QUANTITÀ FINITE.

Cap. I. *Dell' Algebra in generale* . . . . . Pag. 1.
Cap. II. *Delle prime operazioni dell' Algebra* . . . 3.
Cap. III. *Delle frazioni* . . . . 13.
Cap. IV. *Delle potenze* . . . . 19.
Cap. V. *Dei radicali* . . . . 30.
Cap. VI. *Delle quantità immaginarie* . . . . 44.
Cap. VII. *Della risoluzione de' Problemi, e dell' equazioni del primo grado* . . . . 48.
Cap. VIII. *Dell' equazioni del secondo grado, e delle altre che ammettono una simile risoluzione* 59.
Cap. IX. *Della natura, e delle proprietà dell' equazioni* . . . . 64.
Cap. X. *Dell' equazioni del terzo grado* . . . . . . 95.
Cap. XI. *Dell' equazioni del quarto grado* . . . . . 101.
Cap. XII. *Dell' eliminazione delle incognite dall' equazioni de' gradi superiori* . . . . . . 104.
Cap. XIII. *Del modo di trovare i fattori razionali dell' equazioni* . . . . 109.
Cap. XIV. *Ricerca delle radici dell' equazioni per approssimazione* . . . . 115.
Cap. XV. *De' problemi indeterminati* . . . . 137.

PARTE SECONDA

INTRODUZIONE ALL' ANALISI INFINITESIMALE.

Cap. I. *Delle funzioni in generale* . . . . 153.
Cap. II. *Delle quantità esponenziali, e de' logaritmi* 157.

Cap. III. *Delle quantità trascendenti che dipendono dal cerchio* . . . . 162.

Cap. IV. *Della evoluzione delle funzioni in Serie* . 168.

Cap. V. *Della riduzione delle quantità immaginarie alla forma* $A+B\sqrt{-1}$ . . . . 179.

Cap. VI. *Delle frazioni continue* . . . . 188.

Cap. VII. *Delle linee curve in generale* . . . . 219.

Cap. VIII. *Della permutazione delle coordinate, e dei diversi ordini delle curve* . . . . 223.

Cap. IX. *Delle linee del second' ordine* . . . . 226.

Cap. X. *De' rami infiniti delle curve* . . . . 238.

Cap. XI. *Della figura delle linee curve* . . . . 247.

Cap. XII. *Dell' invenzione delle curve dalle loro date proprietà, o sia de' luoghi Geometrici* . 251.

Cap. XIII. *Dell' intersezione delle curve, e della costruzione dell' equazioni* . . . . 258.

Cap. XIV. *Delle curve trascendenti* . . . . 268.

Cap. XV. *Delle superficie curve, e delle curve di doppia curvatura* . . . . 274.

		ERRORI	CORREZIONI
Pag. 28.	lin. 9.	binomio	trinomio
38.	26.	$(a+b)^p=a$	$(a+b)^p=a^p$
42.	8.	$+\frac{m2(n-1)b^2}{2na^2}$	$\frac{m^2(n-1)b^2}{2na^2}$
ivi		$+\frac{2m2(m-n)(n-1)b^3}{2n.2na^2}$	$+\frac{2m^2(m-n)(n-1)b^3}{2n.2na^3}$
43.	10.	$\frac{m2-m}{2}$	$\frac{m^2-m}{2}$
ivi		b_3	b^3
45.	23.	$=ab$.	$=-ab$:
87.	38.	t'	s'
ivi	38.	$(E1)$	(E')
89.	7.	(E)	(E')
91.	11.	$1.2\ldots(m-p)$	$1.2\ldots p.(m-p)$
97.	6.	$=\frac{1}{2}$	$=-\frac{1}{2}$
123.	10.	-36	$+36$
ivi	26.	quoziente di (B')	quoziente di (B'')
126.	29.	$x=\frac{pqr+p+r}{q}$	$x=\frac{pqr+p+r}{qr+1}$
130.	16.	x	y
147.	22.	$\frac{q''}{bq'}$	$\frac{q''}{bp}$
155.	6.	$(x-c)(x-d)$ec.	$(x-b)(x-c)$ec.
172.	20.	$C=\frac{B(A-2)}{2}$	$C=\frac{B(A-2)}{3}$
174.	26.	$+\frac{9^3}{4}$	$+\frac{9^3}{3}$
178.	12.	$+\frac{1}{2.3.4.6}$	$+\frac{1}{2.3.4.5.6}$
186.	3.	x è dispari	n è dispari
ivi	9.	$\cos.\frac{2m+1}{2}p$	$\cos.\frac{2m+1}{n}p$
207.	20.	$\lambda<\mp B$	$\lambda<\pm B$
241.	20.	equazoine	equazione
248.	18.	$y=\frac{P}{Q}$	$y=\frac{Q}{P}$
261.	6.	C del cerchio	D del cerchio

Fig. 2.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 7.

Fig. 9.

Fig. 11.

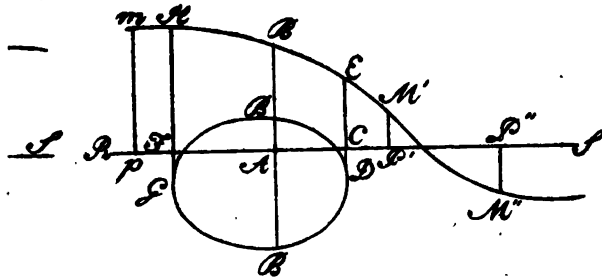



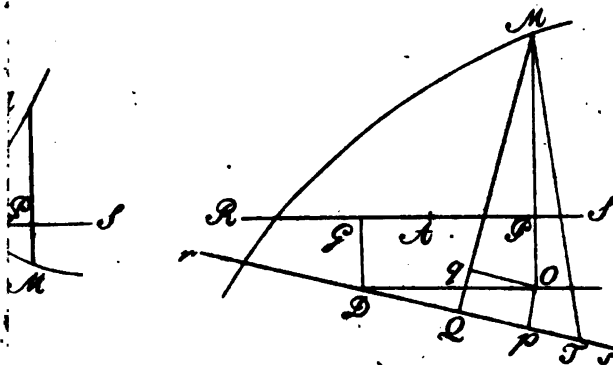
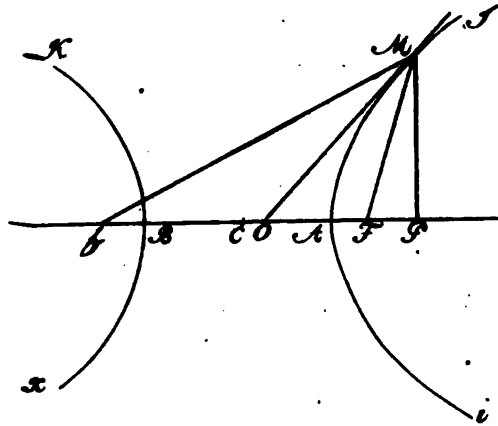
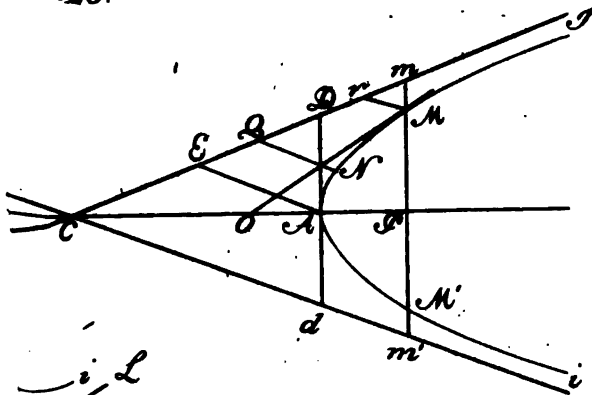
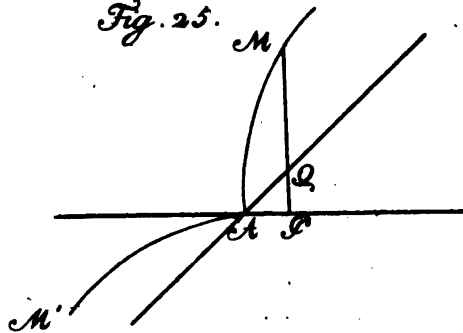
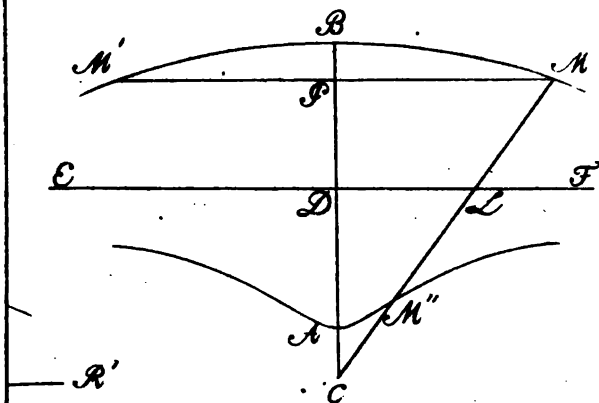
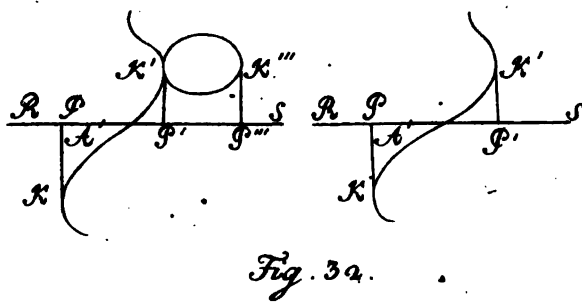
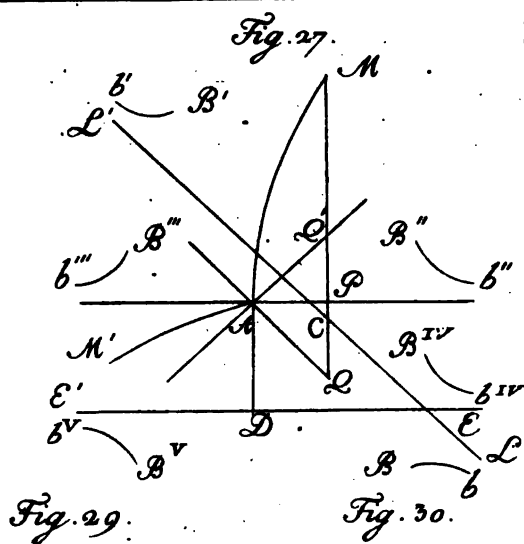
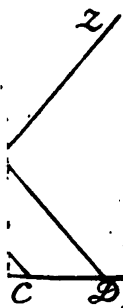
Fig. 13.

Tav. IV.

Fig. 22.
K
M
I
f
B
C
O
A
F
P
x
i
Fig. 23.
I
m
D
r
M
E
Q
N
C
O
A
P
M'
d
m'
i
L
n
N
Fig. 25.
M
Q
A
P
M'

Tav. V.

Fig. 27.
M
b'
B'
L'
Q'
B''
B'''
b'''
b''
P
A
C
M'
B^IV
Q
b^IV
E'
D
E
b^V
L
B^V
B
b
Fig. 29.
Fig. 30.
K'
K'''
K'
R
P
S
R
P
S
A'
P'
P'''
A'
P'
K
K
Fig. 32.
B
M'
M
P
E
F
D
L
M''
A
C
R'

Fig. 3.

2

C

Fig. 34.
Z
C
D y
Fig 35
G
D
O
L
Q
M
A
P
N
K
F
E
Fig. 36. n.° 3.
M
A
D
B
Fig. 36. n.° 2.
B
E
D
Fig. 38.
H
C
A
B
F
D
P
M

Tav VI

Fig. 34.
Z
C
D
y
Fig 35
G
D
O
L
Q
M
A
I
N
H
F
E
Fig. 36. nº 3.
M
A
D
B
Fig. 36. nº 2.
B
E
D
Fig. 38.
K
C
A
B
F
D
P
M

Fig. 40.

Fig. 42.

Fig. 44.

Tav. VIII.

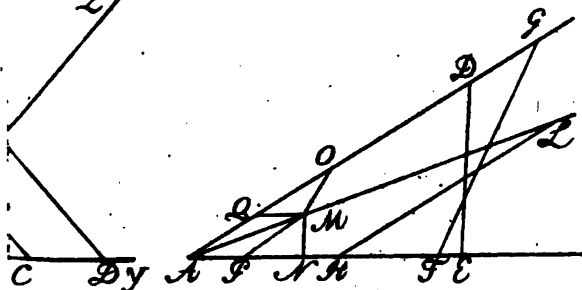
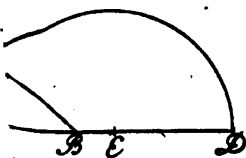
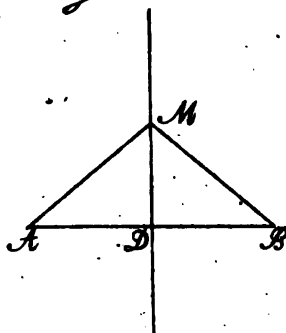
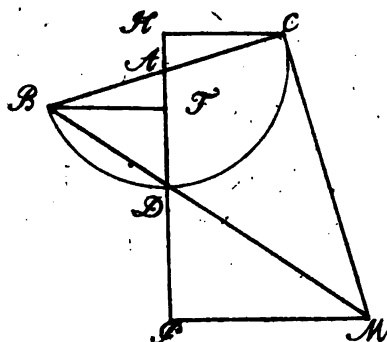
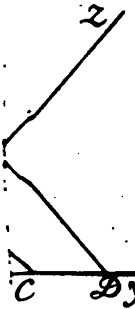
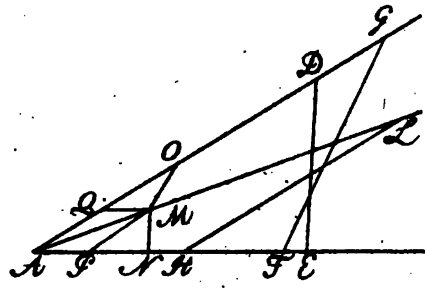
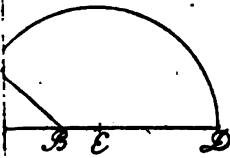
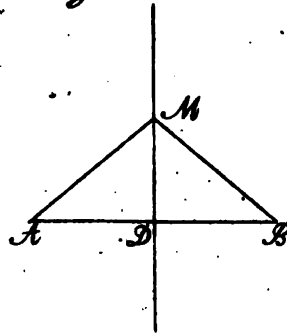
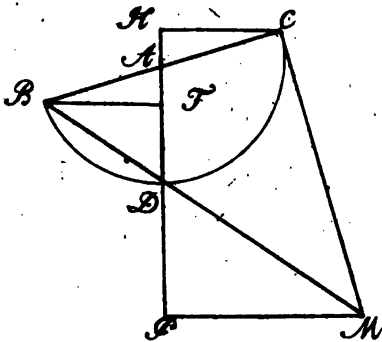
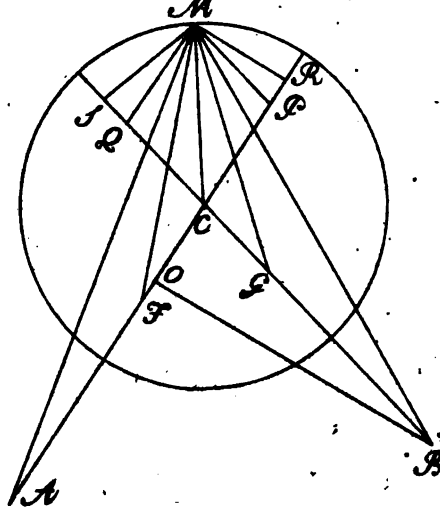
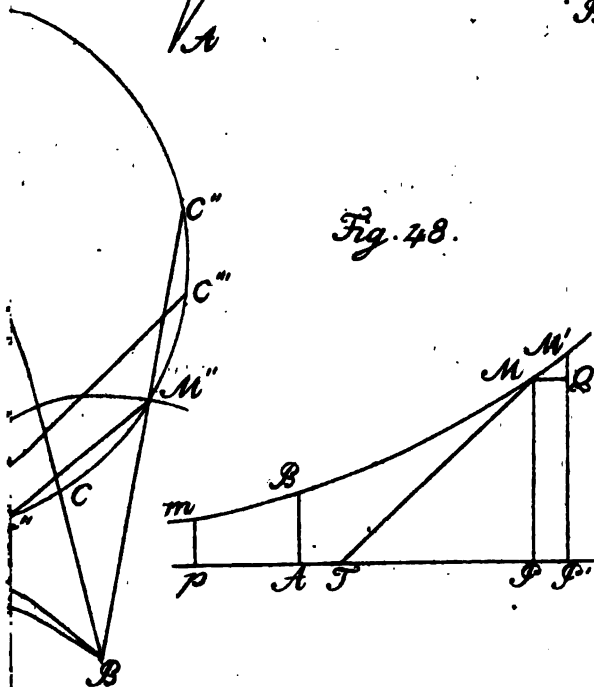



Fig. 50.

Fig. 52.

Fig. 54.

Fig. 55.

Fig. 57.